

Formule de Trace pour les Anneaux de Witt.

Benali BENZAGHOU, Siham MOKHFI.

USTHB, Faculté des Mathématiques,
B. P. 32, El Alia, 16111, Alger, Algérie
USDB BP 270, Route Soumaa Blida, Algérie
s_mokhfi@usdb-blida.dz

May 26, 2016

1 Anneaux de Witt

1.1 Le foncteur \mathbf{S} des suites

Notation 1.1. Soit A un anneau commutatif. L'anneau $\mathbf{S}(A)$ est l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites d'éléments de A muni de la structure d'anneau produit.

On voit donc que la multiplication de $\mathbf{S}(A)$ est la multiplication terme à terme, appelée multiplication de Hadamard par certains auteurs [2], [3]. Pour des raisons de clarté typographique, à l'instar de [15], nous représentons la suite d'éléments de A de terme général a_n par la notation $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ quand nous la considérons comme élément de l'anneau $\mathbf{S}(A)$.

Notation 1.2. Soit A un anneau et m un entier naturel. Nous noterons κ_m l'application

de $\mathbf{S}(A)$ dans A défini par

$$\forall a = \langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{S}(A), \quad \kappa_m(a) = a_m .$$

Il est clair que ces applications κ_m sont des morphismes d'anneaux de $\mathbf{S}(A)$ dans A .

Notation 1.3. Soit A et B deux anneaux commutatifs et $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme $\mathbf{S}(\rho)$ de $\mathbf{S}(A)$ à $\mathbf{S}(B)$ est l'application telle que

$$\forall \langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{S}(A), \quad \mathbf{S}(\rho)(\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}) = \langle \rho(a_n) \rangle_{n \in \mathbb{N}} .$$

On vérifie immédiatement que les notations 1.1 et 1.3 permettent de définir un foncteur \mathbf{S} de la catégorie des anneaux commutatifs dans elle-même.

Notation 1.4. Pour un idéal I de A , on note $\mathbf{S}(I)$ l'ensemble des suites $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont éléments de I .

Il est immédiat de voir que, si I est idéal de A , alors $\mathbf{S}(I)$ est un idéal de $\mathbf{S}(A)$. D'autre part, lorsque I et J sont deux idéaux de A , on a l'inclusion $\mathbf{S}(I)\mathbf{S}(J) \subseteq \mathbf{S}(IJ)$. En particulier, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, et pour tout idéal I de A , on a l'inclusion $\mathbf{S}(I^m)\mathbf{S}(I^n) \subseteq \mathbf{S}(I^{m+n})$. Ceci signifie que la suite d'idéaux $(\mathbf{S}(I^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration décroissante de l'anneau $\mathbf{S}(A)$.

Définition 1.5. Soit A un anneau et I un idéal de A . La topologie définie par la filtration $(\mathbf{S}(I^n))_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{S}(A)$ est appelée la I -topologie de $\mathbf{S}(A)$.

Remarque 1.1. Les morphismes κ_m de la notation 1.2 sont évidemment continus quand on munit $\mathbf{S}(A)$ de la I -topologie et A de la topologie I -adique.

Proposition 1.2. Soit A un anneau et I un idéal de A . Si l'anneau A est séparé et complet pour la topologie I -adique, alors l'anneau $\mathbf{S}(A)$ est séparé et complet pour la I -topologie.

Démonstration : L'anneau A est séparé pour la topologie I -adique si et seulement si l'intersection de tous les idéaux I^n de A est réduite à $\{0\}$. Ceci équivaut évidemment

à dire que l'intersection de tous les idéaux $\mathbf{S}(I^n)$ de l'anneau $\mathbf{S}(A)$ est réduite à $\{0\}$, c'est-à-dire que $\mathbf{S}(A)$ est séparé pour la I -topologie.

Soit d'autre part une suite $(\langle a_{k,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ (avec $a_{k,n} \in A$ pour tout couple (k, n) d'entiers naturels) d'éléments de $\mathbf{S}(A)$ qui est de Cauchy pour la I -topologie. On vérifie immédiatement que, pour tout entier naturel n , la suite $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la topologie I -adique. Si A est supposé complet pour la topologie I -adique, il en résulte l'existence d'un élément b_n de A qui est limite de $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ pour la topologie I -adique. De plus, pour tout entier $h \in \mathbb{N}$, il existe un entier naturel k_0 tel que, pour tout couple (k, n) d'entier naturels tel que $k \geq k_0$, on ait $a_{k,n} - b_n \in I^h$: ceci résulte du fait que la suite $(\langle a_{k,n} \rangle_{n \in \mathbb{N}})_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la I -topologie de $\mathbf{S}(A)$, et que I^h est un fermé pour la topologie I -adique de A . On voit donc que notre suite converge vers la suite $\langle b_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ pour la I -topologie de $\mathbf{S}(A)$. \square

Proposition 1.3. *Soit A un anneau, I un idéal de A et $a = \langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbf{S}(I)$. On suppose que l'anneau A est séparé et complet pour la topologie I -adique. Il existe un unique morphisme continu $\text{sv}_{a,I}$ de l'anneau $\mathbf{S}(A)[[t]]$ des séries entières formelles à coefficients dans $\mathbf{S}(A)$, muni de la topologie t -adique, sur l'anneau $\mathbf{S}(A)$, muni de la I -topologie, tel que :*

- la restriction de $\text{sv}_{a,I}$ au sous-anneau $\mathbf{S}(A)$ est l'identité ;
- $\text{sv}_{a,I}(t) = a$.

Démonstration : Les conditions données caractérisent au plus un morphisme continu, puisque le sous-anneau $\mathbf{S}(A)[t]$ de l'anneau $\mathbf{S}(A)[[t]]$ engendré par la partie $\mathbf{S}(A) \cup \{t\}$ est dense pour la topologie t -adique de $\mathbf{S}(A)[[t]]$.

Pour établir l'existence du morphisme $\text{sv}_{a,I}$, il suffit de construire d'abord sa restriction au sous-anneau $\mathbf{S}(A)[t]$, puis de montrer que cette restriction est uniformément continue pour la distance t -adique. La première construction est évidemment réalisée en posant

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall (a_0, \dots, a_r) \in \mathbf{S}(A)^{r+1}, \quad \text{sv}_{a,I} \left(\sum_{j=0}^r a_j t^j \right) = \sum_{j=0}^r a_j a^j \in \mathbf{S}(A) .$$

Pour vérifier que cette dernière formule définit une application uniformément continue

de l'anneau $\mathbf{S}(A)[t]$, muni de la distance t -adique, dans l'anneau $\mathbf{S}(A)$, muni de la distance associée à la filtration de ce dernier anneau par les idéaux $\mathbf{S}(I^n)$, il suffit d'observer que la validité de l'implication

$$\sum_{j=0}^r a_j t^j \in t^n \mathbf{S}(A)[[t]] \Rightarrow \sum_{j=0}^r a_j a^j \in \mathbf{S}(I)^n \subseteq \mathbf{S}(I^n)$$

résulte du fait que $a \in \mathbf{S}(I)$. \square

On justifie de façon analogue que, si I est un idéal de A tel que A est séparé et complet pour la topologie I -adique, alors, pour tout élément $a \in I$, il existe un unique morphisme continu ε_a , dit de spécialisation, de l'anneau $A[[T]]$, muni de la topologie T -adique, dans l'anneau A , muni de la topologie I -adique, tel que $\varepsilon_a(b) = b$ pour tout $b \in A$ et $\varepsilon_a(T) = a$.

On définit aussi un unique morphisme S_T , continu pour les topologies T -adiques, de l'anneau $A[[T]]$ des séries entières formelles en une indéterminée T à coefficients dans A dans l'anneau $\mathbf{S}(A)[[T]]$ tel que $S_T(T) = T$ et $S_T(a) = \langle a \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout élément $a \in A$.

La formule suivante peut dans certains cas simplifier le calcul du morphisme $\text{sv}_{a,I}$.

Proposition 1.4. *Dans les hypothèses et avec les notations de la proposition 1.3, on a pour tout entier naturel n la relation*

$$\varepsilon_{\kappa_n(a)} = \kappa_n \circ \text{sv}_{a,I} \circ S_T .$$

Démonstration : Les deux membres de la formule à montrer sont deux morphismes continus de $A[[T]]$, muni de la topologie T -adique, dans l'anneau A , muni de la topologie I -adique, et ils donnent à tout élément $b \in A$, ainsi qu'à l'indéterminée T , la même image. Puisque le sous-anneau $A[T]$ engendré par $A \cup \{T\}$ est dense dans l'anneau $A[[T]]$ pour la topologie T -adique, on en conclut à l'égalité désirée. \square

Notation 1.6. Pour tout anneau commutatif A , on note f_A l'application de $\mathbf{S}(A)$ dans lui-même définie par

$$\forall \langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}, \quad f_A(\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}) = \langle a_{n+1} \rangle_{n \in \mathbb{N}} .$$

On vérifie facilement qu'on a ainsi défini un endomorphisme fonctoriel f du foncteur \mathbf{S} .

Alors on peut considérer l'anneau des suites $\mathbf{S}(A)$ comme un module sur lui-même de deux façons différentes : pour la multiplication de Hadamard, ou bien pour la multiplication \star définie par

$$\forall (a, b) \in \mathbf{S}(A) \times \mathbf{S}(A), \quad a \star b = f_A(a)b.$$

Notation 1.7. On note v_A l'application de $\mathbf{S}(A)$ dans lui-même telle que

$$v_A (\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}) = \langle 0, p.a_0, p.a_1, \dots \rangle.$$

On remarque que v_A est un morphisme $\mathbf{S}(A)$ -linéaire quand on munit l'ensemble de départ de la multiplication \star et l'ensemble d'arrivée de la multiplication de Hadamard.

1.2 Polynômes de Witt et application fantôme

Soit p un nombre premier.

Définition 1.8. Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle n -ième polynôme de Witt l'élément fant_n de l'anneau $\mathbb{Z}[X_0, \dots, X_n]$ des polynômes à coefficients entiers en $n+1$ indéterminées défini par

$$\text{fant}_n(X_0, \dots, X_n) = \sum_{i=0}^n p^i X_i^{p^{n-i}} = X_0^{p^n} + pX_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n X_n.$$

Formulaire pour les polynômes de Witt

$$\text{fant}_0(X_0) = X_0;$$

$$\text{fant}_{n+1}(X_0, \dots, X_{n+1}) = \text{fant}_n(X_0^p, \dots, X_n^p) + p^{n+1}X_{n+1};$$

$$\text{fant}_{n+1}(X_0, \dots, X_{n+1}) = X_0^{p^{n+1}} + p \text{fant}_n(X_1, \dots, X_{n+1}).$$

Définition 1.9. Pour un anneau commutatif A , l'application fantôme de A est l'application de l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ dans lui-même qui associe à la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite

$$\text{fant}_A(a) = (\text{fant}_n(a_0, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

On dit que l'élément $\text{fant}_n(a_0, \dots, a_n)$ de A est la composante fantôme d'indice n de la suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le lemme suivant caractérise l'image de l'application fantôme quand il existe un endomorphisme de l'anneau A qui relève l'endomorphisme de Frobenius de l'anneau quotient A/pA .

Lemme 1.5. *Soit A un anneau muni d'un endomorphisme σ vérifiant pour tout $a \in A$ la congruence*

$$\sigma(a) \equiv a^p \pmod{pA}.$$

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $A^{\mathbb{N}}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $u_n = \text{fant}_n(a_0, \dots, a_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$;*
- b) la congruence $\sigma(u_{n-1}) \equiv u_n \pmod{p^n A}$ est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.*

Si de plus $p.1$ n'est pas diviseur de zéro dans A , alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'assertion a) est unique.

Démonstration : Voir [5, page AC IX.3]. □

1.3 Construction de Polynômes

Proposition 1.6. *Soit $k \geq 1$ un entier naturel. Pour tout polynôme Φ à coefficients entiers rationnels en k indéterminées, il existe une unique suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients entiers en k suites d'indéterminées $(X_{n,j})_{n \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k}$ telle que, pour tout entier naturel n , on ait*

$$\text{fant}_n(\varphi_0, \dots, \varphi_n) = \Phi(\text{fant}_n(X_{0,1}, \dots, X_{n,1}), \dots, \text{fant}_n(X_{0,k}, \dots, X_{n,k})).$$

De plus, pour tout entier naturel n , le polynôme φ_n est élément de $\mathbb{Z}[X_{m,j}]_{0 \leq m \leq n, 1 \leq j \leq k}$.

Démonstration : Cf [11, Theorem 5.2 p. 332] ou [8, Théorème 1.5]. \square

Pour les choix $\Phi(U, V) = U + V$, $\Phi(U, V) = UV$, $\Phi(U) = -U$, la proposition précédente montre l'existence des suites de polynômes à coefficients entiers $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{P} = (\mathbf{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbf{I} = (\mathbf{I}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel n , on ait :

$$\text{fant}_n(\mathbf{S}_0, \dots, \mathbf{S}_n) = \text{fant}_n(X_0, \dots, X_n) + \text{fant}_n(Y_0, \dots, Y_n);$$

$$\text{fant}_n(\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n) = \text{fant}_n(X_0, \dots, X_n) \text{fant}_n(Y_0, \dots, Y_n);$$

$$\text{fant}_n(\mathbf{I}_0, \dots, \mathbf{I}_n) = -\text{fant}_n(X_0, \dots, X_n).$$

On a par exemple :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_0 &= X_0 + Y_0, & \mathbf{S}_1 &= X_1 + Y_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p} \binom{p}{i} X_0^i Y_0^{p-i}, \\ \mathbf{P}_0 &= X_0 Y_0, & \mathbf{P}_1 &= p X_1 Y_1 + X_0^p Y_1 + X_1 Y_0^p. \end{aligned}$$

Pour un nombre premier $p > 2$ et pour tout entier naturel n , on a $\mathbf{I}_n = -X_n$. Si au contraire $p = 2$, on a $\mathbf{I}_0 = -X_0$, $\mathbf{I}_1 = -(X_0^2 + X_1)$, $\mathbf{I}_2 = -X_0^4 - X_0^2 X_1 - X_1^2 - X_2$.

Proposition 1.7. *Il existe une unique suite $(\mathbf{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients entiers en une suite d'indéterminées $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel n , on ait*

$$\text{fant}_n(\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_n) = \text{fant}_{n+1}(X_0, \dots, X_{n+1}).$$

De plus, pour tout entier naturel n , le polynôme \mathbf{F}_n est élément de $\mathbb{Z}[X_0, X_1, \dots, X_{n+1}]$.

Démonstration : Soit $A_1 = \mathbb{Z}[(X_n)_{n \in \mathbb{N}}]$. On observe que l'endomorphisme θ_1 de l'anneau A_1 tel que $\theta_1(X_n) = X_n^p$ est tel que la congruence $\theta_1(a_1) \equiv a_1^p \pmod{pA_1}$ est satisfaite pour tout élément a_1 de A_1 . Pour un entier naturel n , on pose $u_n = \text{fant}_{n+1}(X_0, \dots, X_{n+1}) \in A_1$. On a

$$\theta_1(u_{n-1}) = \text{fant}_n(X_0^p, \dots, X_n^p)$$

D'après la formule 2 du formulaire, on a

$$\theta_1(u_{n-1}) = u_n - p^{n+1}X_{n+1} \equiv u_n \pmod{p^n A_1}.$$

Il suffit d'appliquer le lemme 1.5 pour montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(\mathbf{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant l'identité

$$\text{fant}_n(\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_n) = u_n$$

pour tout entier naturel n . La dernière assertion de la proposition résulte d'une récurrence sur l'entier n , en remarquant que $u_n \in \mathbb{Z}[X_0, \dots, X_{n+1}]$. \square

On a par exemple $u_0 = X_0^p + pX_1$ et $u_1 = X_0^{p^2} + pX_1^p + p^2X_2$, d'où $\mathbf{F}_0 = X_0^p + pX_1$ et $\mathbf{F}_1 = X_1^p + pX_2 - \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} p^{p-i-1} X_0^{pi} X_1^{p-i}$.

Remarque 1.8. Comme $\text{fant}_n(\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_n) \equiv \text{fant}_n(X_0^p, \dots, X_n^p) \pmod{p^{n+1}A_1}$, on peut démontrer par récurrence sur l'entier naturel n la congruence

$$\mathbf{F}_n \equiv X_n^p \pmod{pA_1}.$$

1.4 L'anneau $\mathbf{W}(A)$ des vecteurs de Witt

1.4.1 Opérations de Witt

Définition 1.10. Soit A un anneau commutatif. On définit deux lois de composition internes, appelées addition de Witt et multiplication de Witt, et notées respectivement $+_W$ et \times_W , sur l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de A comme suit:

$$\forall \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall \mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \mathbf{a} +_W \mathbf{b} = (S_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

et pareillement

$$\forall \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall \mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \mathbf{a} \times_W \mathbf{b} = (P_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

On note $\mathbf{W}(A)$ l'ensemble $A^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de A muni de l'addition de Witt et de la multiplication de Witt.

Théorème 1.9. Soit A un anneau commutatif. Le triplet $(\mathbf{W}(A), +_W, \times_W)$ est un anneau commutatif. Son élément nul est le vecteur $\mathbf{0}$ dont toutes les composantes sont nulles. Son élément unité est le vecteur $\mathbf{1}$ dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice 0 qui vaut 1.

L'opposé d'un élément \mathbf{a} de $\mathbf{W}(A)$ est le vecteur $-\mathbf{a} = (\mathbf{I}_n(a_0, \dots, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

Les éléments de l'anneau $\mathbf{W}(A)$ sont appelés les vecteurs de Witt sur A .

Proposition 1.10. Pour tout anneau commutatif A , l'application fant_A de $\mathbf{W}(A)$ dans $\mathbf{S}(A)$ définie par

$$\forall \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{W}(A), \quad \text{fant}_A(\mathbf{a}) = \langle \text{fant}_n(a_0, a_1, \dots, a_n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$$

est un morphisme d'anneaux. Elle est bijective si $p \cdot 1$ est inversible dans A , et injective si le groupe additif de A n'a pas de p -torsion.

1.4.2 Fonctorialité

Définition 1.11. Soit $\rho: B \rightarrow A$ un morphisme d'anneaux. Définissons l'application $\mathbf{W}(\rho)$ de $\mathbf{W}(A)$ vers $\mathbf{W}(B)$ telle que

$$\forall \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{W}(A), \quad \mathbf{W}(\rho)(\mathbf{a}) = (\rho(a_n))_{n \in \mathbb{N}}.$$

Proposition 1.11. L'application $\mathbf{W}(\rho)$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbf{W}(A)$ dans $\mathbf{W}(B)$. De plus, on a $\text{fant}_B \circ \mathbf{W}(\rho) = \mathbf{S}(\rho) \circ \text{fant}_A$.

Proposition 1.12. L'association de l'anneau $\mathbf{W}(A)$ à l'anneau A et du morphisme $\mathbf{W}(\rho)$ au morphisme $\rho: A \rightarrow B$, définit un foncteur de la catégorie des anneaux dans elle-même. De plus, l'association de l'application fant_A à l'anneau A définit un morphisme fonctoriel du foncteur \mathbf{W} dans le foncteur \mathbf{S} .

1.4.3 La transformation naturelle τ

Notation 1.12. Soit A un anneau. Notons par τ_A l'application de A dans $\mathbf{W}(A)$ qui à chaque élément a de A associe le vecteur $\tau_A(a) = (a, 0, 0, \dots)$.

Assertion 1.13. *La transformation τ est naturelle, c'est-à-dire que, pour tout morphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow B$, on a $\mathbf{W}(\rho) \circ \tau_A = \tau_B \circ \rho$.*

Proposition 1.14. *Soient a, b des éléments de l'anneau A et $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\mathbf{W}(A)$. On a :*

$$\text{fant}_A(\tau_A(a)) = \langle a^{p^n} \rangle_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$\tau_A(a) \times \mathbf{x} = (a^{p^n} x_n)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$\tau_A(ab) = \tau_A(a) \times \tau_A(b) .$$

1.4.4 Les homomorphismes de Frobenius et de décalage

Soit A un anneau commutatif. Rappelons que, d'après la proposition 1.7, la suite de polynômes $(\mathbf{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par la relation $\text{fant}_n(\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_n) = \text{fant}_{n+1}(X_0, \dots, X_{n+1})$.

Définition 1.13. On définit deux applications Frob_A et V_A de $\mathbf{W}(A)$ dans lui-même en posant :

$$\forall \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{W}(A), \quad \text{Frob}_A(\mathbf{a}) = (\mathbf{F}_n(a_0, \dots, a_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$$

et

$$\forall \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{W}(A), \quad V_A(\mathbf{a}) = (0, a_0, a_1, \dots) .$$

L'application Frob_A est appelée l'application de Frobenius de $\mathbf{W}(A)$, et l'application V_A le décalage de $\mathbf{W}(A)$.

Assertion 1.15. *Les transformations Frob et V sont naturelles, c'est-à-dire que, pour tout homomorphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow B$, on a les relations :*

$$\mathbf{W}(\rho) \circ \text{Frob}_A = \text{Frob}_B \circ \mathbf{W}(\rho) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}(\rho) \circ V_A = V_B \circ \mathbf{W}(\rho) .$$

Proposition 1.16. *L'application Frob_A est un endomorphisme de l'anneau $\mathbf{W}(A)$ des vecteurs de Witt sur l'anneau A . L'application V_A est un endomorphisme du groupe additif de l'anneau $\mathbf{W}(A)$.*

Proposition 1.17. *Pour tout anneau commutatif A , on a*

$$\text{fant}_A \circ \text{Frob}_A = f_A \circ \text{fant}_A \quad \text{et} \quad \text{fant}_A \circ V_A = v_A \circ \text{fant}_A.$$

Quelque soient les vecteurs de Witt $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{W}(A)$, on a

$$V_A(\mathbf{a} \times \text{Frob}_A(\mathbf{b})) = V_A(\mathbf{a}) \times \mathbf{b} \quad \text{et} \quad V_A(\mathbf{a}) \times V_A(\mathbf{b}) = pV_A(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Posons $\mathbf{b}_0 = V_A(\mathbf{1}) = (0, 1, 0, \dots)$. Pour tout vecteur de Witt $\mathbf{a} \in \mathbf{W}(A)$, on a

$$V_A(\text{Frob}_A(\mathbf{a})) = \mathbf{b}_0 \times \mathbf{a} \quad \text{et} \quad \text{Frob}_A(V_A(\mathbf{a})) = p\mathbf{a}. \quad (1)$$

Remarque 1.18. Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, l'image $V^m \mathbf{W}(A)$ de la m -ième puissance de composition du décalage V_A est un idéal de \mathbf{A} . De plus, si $\rho : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, on a toujours $\mathbf{W}(\rho)(V^m \mathbf{W}(A)) \subseteq V^m \mathbf{W}(B)$.

Proposition 1.19. *Soit A un anneau commutatif. Pour tout vecteur de Witt $\mathbf{a} \in \mathbf{W}(A)$, on a la congruence $\text{Frob}_A(\mathbf{a}) \equiv \mathbf{a}^{\times p} \pmod{p\mathbf{W}(A)}$, où $\mathbf{a}^{\times p}$ est le produit dans $\mathbf{W}(A)$ de p éléments égaux à \mathbf{a} .*

Démonstration : Voir [?] □

Proposition 1.20. *Soit A un anneau commutatif, et a un élément de A . On a les égalités*

$$\text{Frob}_A(\tau_A(a)) = \tau_A(a^p) = (\tau_A(a))^p.$$

Démonstration : Les relations à montrer sont vérifiées dans le cas où p n'est pas diviseur de zéro dans A parce que les vecteurs de Witt considérés ont la même image par l'application fantôme. Dans le cas général Voir lemme 3 [5, page AC IX.6], il existe un morphisme surjectif $\rho : B \rightarrow A$ tel que p n'est pas diviseur de zéro dans B . On a donc $a = \rho(b)$ où $b \in B$ et par naturalité de τ et de Frob , on en tire

$$\text{Frob}_A(\tau_A(a)) = \text{Frob}_A(\tau_A(\rho(b))) = \mathbf{W}(\rho)(\text{Frob}_B(\tau_B(b))) .$$

Puisque p n'est pas diviseur de zéro dans B , on sait que $\text{Frob}_B(\tau_B(b)) = \tau_B(b^p)$, et on en déduit

$$\text{Frob}_A(\tau_A(a)) = \mathbf{W}(\rho)(\tau_B(b^p)) = \tau_A(\rho(b^p)) = \tau_A(\rho(b)^p) = \tau_A(a^p) .$$

□

1.4.5 Développement en série d'un vecteur de Witt

On munit dorénavant l'anneau $\mathbf{W}(A)$ de la topologie associée à la filtration décroissante $(V^m \mathbf{W}(A))_{m \in \mathbb{N}}$. On sait que ceci fait de $\mathbf{W}(A)$ un anneau topologique séparé et complet [5, page AC IX.11]. Cette topologie va nous permettre d'exprimer tout vecteur de Witt sur A comme somme d'une série.

Proposition 1.21. *Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un vecteur de Witt sur l'anneau A . La série de terme général $V_A^n(\tau(a_n))$ est convergente de somme \mathbf{a} .*

Démonstration : Voir [5, page AC IX.11].

□

1.4.6 La transformation Δ

Proposition 1.22. *Il existe un unique morphisme fonctoriel Δ du foncteur \mathbf{W} dans le foncteur $\mathbf{W} \circ \mathbf{W}$ tel que, pour tout anneau commutatif A et pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur A , l'image $\Delta_A(\mathbf{a})$ du vecteur \mathbf{a} par la composante Δ_A de Δ en A vérifie*

$$\text{fant}_{\mathbf{W}(A)}(\Delta_A(\mathbf{a})) = \langle \text{Frob}^n(\mathbf{a}) \rangle_{n \in \mathbb{N}} . \quad (2)$$

Démonstration : Voir [5, exercice 15, p. AC IX.44].

□

La proposition 1.22 ne nous sera utile que dans le cas où $A = \mathbb{F}_p$ est le corps à p éléments. Dans ce cas, on sait [17] que $\mathbf{W}(A)$ est isomorphe à l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p -adiques et que le morphisme de Frobenius de $\mathbf{W}(A)$ s'identifie à l'identité de \mathbb{Z}_p . On a donc :

Proposition 1.23. *Il existe un unique monomorphisme Δ de \mathbb{Z}_p dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z}_p)$ tel que*

$$\forall a \in \mathbb{Z}_p, \quad \text{fant}_{\mathbb{Z}_p}(\Delta(a)) = \langle a \rangle_{n \in \mathbb{N}} .$$

1.5 Vecteurs de Witt et idéaux

Notation 1.14. Soit I un idéal d'un anneau commutatif A . On note $\mathbf{W}(I)$ l'ensemble des vecteurs de Witt sur A dont toutes les composantes sont éléments de I .

Proposition 1.24. *Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux. L'idéal noyau du morphisme $\mathbf{W}(\rho)$ est stable par les applications Frob_A et V_A , et est simplement*

$$\ker(\mathbf{W}(\rho)) = \mathbf{W}(\ker(\rho)) .$$

Démonstration : Clair d'après la naturalité des morphismes de Frobenius et de décalage, et d'après la définition de $\mathbf{W}(\rho)$. \square

Corollaire 1.25. *Pour tout idéal I de l'anneau commutatif A , l'ensemble $\mathbf{W}(I)$ est un idéal de l'anneau $\mathbf{W}(A)$ stable par les morphismes de Frobenius et de décalage.*

Corollaire 1.26. *Soit I un idéal de l'anneau commutatif A , et $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux vecteurs de Witt sur A . Alors la congruence*

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{W}(I)}$$

est équivalente à la suite de congruences

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \equiv b_n \pmod{I}.$$

Démonstration : Soit $\rho : A \rightarrow A/I$ la projection naturelle. D'après la proposition 1.24, on sait que $\ker(\mathbf{W}(\rho)) = \mathbf{W}(I)$. Donc la congruence $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \pmod{\mathbf{W}(I)}$ équivaut à l'égalité $\mathbf{W}(\rho)(\mathbf{a}) = \mathbf{W}(\rho)(\mathbf{b})$. Par définition du morphisme $\mathbf{W}(\rho)$, ceci équivaut à dire que $\rho(a_n) = \rho(b_n)$ pour tout entier naturel n . \square

Proposition 1.27. *Soit A un anneau et I un idéal de A . Si un vecteur de Witt \mathbf{a} sur A est élément de $\mathbf{W}(I)$, alors la suite $\text{fant}_A(\mathbf{a})$ est élément de $\mathbf{S}(I)$. Réciproquement, si l'idéal I satisfait la condition*

$$\forall a \in A, \quad pa \in I \Rightarrow a \in I, \quad (3)$$

alors le vecteur de Witt \mathbf{a} sur A est élément de l'idéal $\mathbf{W}(I)$ dès que $\text{fant}_A(\mathbf{a}) \in \mathbf{S}(I)$.

Démonstration : Si $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est élément de $\mathbf{W}(I)$, la condition (3) permet de vérifier par récurrence que $a_n \in I$. \square

Proposition 1.28. *Soit I et J deux idéaux de l'anneau commutatif A . On a toujours l'inclusion*

$$\mathbf{W}(I) \mathbf{W}(J) \subseteq \mathbf{W}(IJ). \quad (4)$$

Démonstration : D'après le corollaire 1.25 appliqué au cas de l'anneau A_2 de polynômes $\mathbb{Z}[(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ et l'idéal I_2 des polynômes P qui s'annulent quand on substitue 0 à toutes les indéterminées X_n pour $n \in \mathbb{N}$, on sait que le produit du vecteur $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par le vecteur $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ doit être élément de l'idéal $\mathbf{W}(I_2)$. Donc, pour tout entier naturel n , le polynôme $\mathbf{P}_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n)$ est élément de I_2 , et est donc de la forme

$$\mathbf{P}_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{j=0}^n X_j Q_j(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n),$$

pour certains polynômes $Q_j \in A_2$. Comme la multiplication de Witt est commutative, on a aussi

$$\mathbf{P}_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{j=0}^n Y_j Q_j(Y_0, \dots, Y_n, X_0, \dots, X_n),$$

et donc finalement

$$\mathbf{P}_n(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n X_j Y_k R_{j,k}(X_0, \dots, X_n, Y_0, \dots, Y_n),$$

pour certains polynômes $R_{j,k} \in A_2$. Soit maintenant A un anneau quelconque et I, J deux idéaux de A : on se donne deux vecteurs de Witt sur l'anneau A

$$\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} ,$$

tel que \mathbf{a} est élément de $\mathbf{W}(I)$ et \mathbf{b} est élément de $\mathbf{W}(J)$. Alors, la composante d'indice n du produit \mathbf{ab} est donnée par

$$\mathbf{P}_n(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k R_{j,k}(a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) ,$$

ce qui met en évidence le fait que cette composante est élément de l'idéal IJ . \square

Corollaire 1.29. *Soit A un anneau et I un idéal de A . La suite d'idéaux $(\mathbf{W}(I^h))_{h \in \mathbb{N}}$ est une filtration de l'anneau $\mathbf{W}(A)$.*

Définition 1.15. Soit A un anneau et I un idéal de A . La topologie définie par la filtration $(\mathbf{W}(I^h))_{h \in \mathbb{N}}$ de $\mathbf{W}(A)$ est appelée la I -topologie de $\mathbf{W}(A)$.

Proposition 1.30. *Soit A un anneau et I un idéal de A . L'application fantôme $\text{fant}_A : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{S}(A)$ est un morphisme continu pour les I -topologies sur $\mathbf{W}(A)$ et $\mathbf{S}(A)$.*

Démonstration : En effet, la proposition 1.27 montre que, pour tout entier naturel h , les composantes fantômes d'un élément de $\mathbf{W}(I^h)$ appartiennent à I^h . \square

Proposition 1.31. *Soit A un anneau et I un idéal de A . Si l'anneau A est séparé et complet pour la topologie I -adique, alors l'anneau $\mathbf{W}(A)$ est aussi séparé et complet pour la I -topologie.*

Démonstration : Si l'anneau A est séparé pour la topologie I -adique, on sait que l'intersection de tous les idéaux I^h lorsque h décrit l'ensemble des entiers naturels est réduite à $\{0\}$. Par conséquent, l'intersection des idéaux $\mathbf{W}(I^h)$ quand h décrit \mathbb{N} est réduite à $\{0\}$, ce qui signifie que la I -topologie de $\mathbf{W}(A)$ est séparée. Reste à montrer que toute suite de vecteurs de Witt sur A qui est de Cauchy pour la I -topologie

converge pour cette topologie. Or soit $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une telle suite. Ecrivons $a_{k,n}$ pour la composante d'indice n du vecteur $\mathbf{a}_k \in \mathbf{W}(A)$. Par hypothèse, pour tout entier naturel h , il existe un entier naturel k_0 tel que, pour tout couple (r, s) d'entiers naturels tels que $\min(r, s) \geq k_0$, on ait $\mathbf{a}_s - \mathbf{a}_r \in \mathbf{W}(I^h)$, c'est-à-dire que $a_{r,n} - a_{s,n} \in I^h$, de sorte que toutes les suites $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ obtenues en fixant l'indice n sont de Cauchy pour la topologie I -adique de A . Par hypothèse, elles sont donc convergentes pour la topologie I -adique de A . Comme I^h est un fermé de A pour la topologie I -adique, on sait que $b_n - a_{k,n}$ est, quelque soit l'entier naturel n , élément de I^h pour tout entier $k \geq k_0$. Soit $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le vecteur de Witt sur A dont la composante b_n d'indice n est la limite de la suite $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}}$ pour la topologie I -adique. Par le corollaire 1.26, on voit que $\mathbf{b} - \mathbf{a}_k$ est élément de $\mathbf{W}(I^h)$ pour tout entier $k \geq k_0$. Ce raisonnement appliqué pour tout entier naturel h montre la suite $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathbf{b} pour la I -topologie. \square

Proposition 1.32. *Soit A un anneau, I un idéal de A et \mathbf{x} un vecteur de Witt appartenant à $\mathbf{W}(I)$. On suppose que l'anneau A est séparé et complet pour la topologie I -adique. Il existe un unique morphisme continu $\text{ev}_{\mathbf{x}, I}$ de l'anneau $\mathbf{W}(A)[[t]]$ des séries entières formelles à coefficients dans $\mathbf{W}(A)$, muni de la topologie t -adique, sur l'anneau $\mathbf{W}(A)$, muni de la topologie I -adique, tel que :*

- la restriction de $\text{ev}_{\mathbf{x}, I}$ au sous-anneau $\mathbf{W}(A) \subset \mathbf{W}(A)[[t]]$ est l'identité ;
- $\text{ev}_{\mathbf{x}, I}(t) = \mathbf{x}$.

Démonstration : Les conditions données caractérisent au plus un morphisme continu, puisque le sous-anneau $\mathbf{W}(A)[t]$ de l'anneau $\mathbf{W}(A)[[t]]$ engendré par la partie $\mathbf{W}(A) \cup \{t\}$ est dense pour la topologie t -adique de $\mathbf{W}(A)[[t]]$.

Pour établir l'existence du morphisme $\text{ev}_{\mathbf{x}, I}$, il suffit de construire d'abord sa restriction au sous-anneau $\mathbf{W}(A)[t]$, puis de montrer que cette restriction est uniformément continue pour la distance t -adique. La première construction est évidemment réalisée en posant

$$\forall r \in \mathbb{N}, \forall (a_0, \dots, a_r) \in \mathbf{W}(A)^{r+1}, \quad \text{ev}_{\mathbf{x}, I} \left(\sum_{j=0}^r a_j t^j \right) = \sum_{j=0}^r a_j x^j \in \mathbf{W}(A) .$$

Pour vérifier que cette dernière formule définit une application uniformément continue de l'anneau $\mathbf{W}(A)[t]$, muni de la distance t -adique, dans l'anneau $\mathbf{W}(A)$, muni de la distance associée à la filtration de ce dernier anneau par les idéaux $\mathbf{W}(I^n)$, il suffit d'observer que la validité de l'implication

$$\sum_{j=0}^r a_j t^j \in t^n \mathbf{W}(A)[[t]] \Rightarrow \sum_{j=0}^r a_j x^j \in \mathbf{W}(I)^n \subseteq \mathbf{W}(I^n)$$

résulte du fait que $x \in \mathbf{W}(I)$ □

Proposition 1.33. *Soit A un anneau, I un idéal de A et \mathbf{x} un vecteur de Witt appartenant à $\mathbf{W}(I)$. On suppose que l'anneau A est séparé et complet pour la topologie I -adique. On note $a = \text{fant}_A(\mathbf{x})$ et fant_T le morphisme de $\mathbf{W}(A)[[T]]$ dans $\mathbf{S}(A)[[T]]$ défini par*

$$f(T) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{a}_n T^n \in \mathbf{W}(A)[[T]] \mapsto \text{fant}_T(f(T)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \text{fant}_A(\mathbf{a}_n) T^n \in \mathbf{S}(A)[[T]] .$$

Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{W}(A)[[T]] & \xrightarrow{\text{fant}_T} & \mathbf{S}(A)[[T]] \\ \text{ev}_{\mathbf{x}, I} \downarrow & & \downarrow \text{sv}_{a, I} \\ \mathbf{W}(A) & \xrightarrow{\text{fant}_A} & \mathbf{S}(A) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration : Les deux applications $\text{fant}_A \circ \text{ev}_{\mathbf{x}, I}$ et $\text{sv}_{a, I} \circ \text{fant}_T$ sont deux morphismes continus de l'anneau $\mathbf{W}(A)[[T]]$ dans $\mathbf{S}(A)$. Comme elles coïncident en tout élément de $\mathbf{W}(A)$ et en T , et que le sous-anneau $\mathbf{W}(A)[T]$ de $\mathbf{W}(A)[[T]]$ engendré par $\mathbf{W}(A) \cup \{T\}$ est dense pour la topologie T -adique dans l'anneau $\mathbf{W}(A)[[T]]$, elles sont égales. □

1.6 Vecteurs de Witt de longueur finie

Définition 1.16. Soit $\ell \geq 1$ un entier naturel. Munissons A^ℓ des opérations "somme" et "produit" définies comme suit : si $\mathbf{a} = (a_j)_{0 \leq j < \ell}$ et $\mathbf{b} = (b_j)_{0 \leq j < \ell}$ sont deux éléments de A^ℓ , on pose

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (S_0(a_0, b_0), \dots, S_{\ell-1}(a_0, \dots, a_{\ell-1}, b_0, \dots, b_{\ell-1}))$$

et

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (P_0(a_0, b_0), \dots, P_{\ell-1}(a_0, \dots, a_{\ell-1}, b_0, \dots, b_{\ell-1})).$$

On note $\mathbf{W}_\ell(A)$ l'ensemble A^ℓ muni des deux opérations $+$ et \times ainsi définies. Un élément de cet anneau $\mathbf{W}_\ell(A)$ est appelé un vecteur de Witt de longueur ℓ sur A .

Pour les mêmes raisons que $\mathbf{W}(A)$, $\mathbf{W}_\ell(A)$ est un anneau.

Proposition 1.34. *L'application de $\mathbf{W}(A)$ vers A^ℓ qui envoie le vecteur de Witt $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur le vecteur de Witt $(a_j)_{0 \leq j < \ell}$ de longueur ℓ est un morphisme surjectif d'anneaux, dont le noyau est l'idéal $V^\ell \mathbf{W}(A)$. Par conséquent, l'anneau $\mathbf{W}_\ell(A)$ des vecteurs de Witt de longueur ℓ est isomorphe à l'anneau quotient $\mathbf{W}(A)/V^\ell \mathbf{W}(A)$.*

Démonstration : Évident. □

Remarque 1.35. Si $\rho : A \rightarrow B$ est un morphisme d'anneaux, il résulte de la définition du morphisme $\mathbf{W}(\rho) : \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}(B)$ que $\mathbf{W}(\rho)(V^\ell \mathbf{W}(A)) \subseteq V^\ell \mathbf{W}(B)$ et donc ce morphisme induit par passage au quotient un morphisme d'anneaux $\mathbf{W}_\ell(\rho)$ de $\mathbf{W}_\ell(A)$ dans $\mathbf{W}_\ell(B)$.

2 Le morphisme d'Artin-Hasse

2.1 Série d'Artin-Hasse associée à un vecteur de Witt

Nous notons $AH(x)$ la fameuse série d'Artin-Hasse définie par

$$AH(x) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} p^{-n} x^{p^n} \right).$$

On sait [16], [13] que les coefficients de la série entière formelle $AH(x)$ appartiennent à l'anneau \mathbb{Z}_p des entiers p -adiques. On peut donc considérer cette série comme à coefficients dans l'anneau $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$.

Pour tout anneau A muni d'un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ dans A , nous noterons encore $AH(x)$ la série à coefficients dans A obtenue en remplaçant chacun des coefficients de la série d'Artin-Hasse par son image dans A . Pour un tel anneau A , on note $\mathcal{G}(A) = \{g \in A[[x]], g(0) = 0\}$ le monoïde constitué des séries entières formelles en une indéterminée x à coefficients dans l'anneau A dont le terme constant est nul, muni de l'opération de composition, et $\Lambda(A)$ le groupe multiplicatif des séries entières formelles en une indéterminée x à coefficients dans A dont le terme constant vaut 1, muni de la topologie x -adique. Nous considérons $\Lambda(A)$ comme muni de l'action $f \mapsto f \circ g$ du monoïde $\mathcal{G}(A)$ par substitution à droite. Pour tout élément $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de l'anneau de Witt $\mathbf{W}(A)$, la famille des séries $(AH(a_i x^{p^i}))_{i \in \mathbb{N}}$ est multipliable dans le groupe topologique $\Lambda(A)$.

Notation 2.1. On note $E(\mathbf{a})$ le produit de la famille $(AH(a_i x^{p^i}))_{i \in \mathbb{N}}$.

Un calcul simple montre que

$$E(\mathbf{a}) = \prod_{i=0}^{\infty} AH(a_i x^{p^i}) = \exp \left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{fant}_n(\mathbf{a}) p^{-n} x^{p^n} \right).$$

Proposition 2.1. Soit A un anneau muni d'un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ dans A . Pour tous vecteurs de Witt \mathbf{a} , \mathbf{b} , et pour tout $\alpha \in A$, on a les formules :

$$E(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = E(\mathbf{a}) E(\mathbf{b}); \tag{5}$$

$$E(V_A(\mathbf{a})) = E(\mathbf{a}) \circ x^p; \quad (6)$$

$$E(\mathbf{a})^p = E(\text{Frob}_A(\mathbf{a})) \circ x^p; \quad (7)$$

$$E(\tau_A(\alpha)\mathbf{a}) = E(\mathbf{a}) \circ (\alpha x) . \quad (8)$$

En particulier, l'application E , appelée morphisme d'Artin-Hasse, est un morphisme du groupe additif $\mathbf{W}(A)$ dans le groupe multiplicatif $\Lambda(A)$.

Lemme 2.2. *Soit un anneau A muni d'un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ dans A , et I un idéal de A . Si le vecteur de Witt \mathbf{a} sur A est élément de l'idéal $\mathbf{W}(I)$, alors tous les coefficients de la série entière formelle $E(\mathbf{a}) - 1$ sont éléments de I .*

Démonstration : On écrit $\mathbf{a} = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Les coefficients de la série entière formelle $AH(x)$ sont éléments de A , et son coefficient constant est 1. Par conséquent, pour tout $i \in \mathbb{N}$, tous les coefficients de la série $AH(a_i x^{p^i}) - 1$ sont, puisque $a_i \in I$, éléments de l'idéal I . \square

2.2 Séries de Lubin-Tate

2.2.1 Générateur de Tate

Soit $F(T)$ une série de Lubin-Tate pour l'uniformisante p de l'anneau des entiers p -adiques. On rappelle [14] que cela signifie que $F(T)$ est une série entière formelle à coefficients dans l'anneau \mathbb{Z}_p de la forme

$$F(T) = pT + T^p + pT^2G(T) , \quad (9)$$

où $G(T)$ est élément de $\mathbb{Z}_p[[T]]$. Une telle série permet de définir une suite $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'extensions finies du corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques : K_m est le corps obtenu en adjoignant à \mathbb{Q}_p les zéros de la $(m+1)$ -ième puissance de composition $F^{\circ(m+1)}(T)$ de la série $F(T)$. Nous notons \mathcal{O}_m l'anneau des entiers de K_m et \mathfrak{m}_m l'idéal maximal de \mathcal{O}_m . Un générateur de Tate $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ (relativement à la série $F(T)$) est [7] une suite

d'éléments de l'idéal de valuation d'une extension algébrique de \mathbb{Q}_p telle que $F(\pi_0) = 0$ et

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad F(\pi_{m+1}) = \pi_m. \quad (10)$$

L'existence d'une infinité de générateurs de Tate relativement à n'importe quelle série de Lubin-Tate est facilement établie. On constate que π_m est une uniformisante de l'anneau de valuation discrète \mathcal{O}_m . En outre, si $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est un générateur de Tate, nous conviendrons de poser $\pi_m = 0$ pour tout entier rationnel $m < 0$, de sorte que la relation (10) est vraie aussi pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

2.2.2 Vecteur de Witt de séries formelles défini par une série de Lubin-Tate

Lemme 2.3. *Si $F(T)$ est une série de Lubin-Tate pour l'uniformisante p de \mathbb{Z}_p , alors la suite $(F^{\circ n}(T))_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de composition de la série $F(T)$ est suite des composantes fantômes d'un unique vecteur de Witt \mathbf{w} ayant toutes ses composantes dans l'idéal $T\mathbb{Z}_p[[T]]$.*

Démonstration : On considère sur l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$, muni de la valuation T -adique, l'unique endomorphisme continu σ tel que $\sigma(T) = F(T)$. La partie de l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$ constituée des séries entières formelles g telles que $\sigma(g) - g^p$ soit élément de l'idéal $p\mathbb{Z}_p[[T]]$ est évidemment un sous-anneau fermé de $\mathbb{Z}_p[[T]]$, qui contient l'anneau \mathbb{Z}_p des constantes ainsi que l'indéterminée T , elle est donc égale à $\mathbb{Z}_p[[T]]$. Par conséquent, on peut appliquer le lemme 1.5, qui montre l'existence d'un unique vecteur de Witt \mathbf{w} sur $\mathbb{Z}_p[[T]]$ tel que $\text{fant}_n(\mathbf{w}) = F^{\circ n}(T)$ pour tout entier naturel n . D'après la proposition 1.27, comme toutes les composantes fantômes du vecteur \mathbf{w} sont éléments de l'idéal $T\mathbb{Z}_p[[T]]$, il en est de même de toutes ses composantes. \square

2.2.3 Spécialisations du vecteur défini par une série de Lubin-Tate

Soit $(\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ un générateur de Tate relativement à une série de Lubin-Tate $F(T)$, et \mathbf{w} le vecteur de Witt sur l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$ dont on a montré l'existence au Lemme

2.3. Pour tout entier naturel m , on dispose de l'unique homomorphisme ε_{π_m} dit de "spécialisation en π_m " de $\mathbb{Z}_p[[T]]$ dans \mathcal{O}_m tel que

$$\forall g(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]], \quad \varepsilon_{\pi_m}(g(T)) = g(\pi_m). \quad (11)$$

Notation 2.2. On pose $\varpi_m = \mathbf{W}(\varepsilon_{\pi_m})(\mathbf{w})$ pour tout entier naturel m .

On remarque que le vecteur de Witt ϖ_m est élément de $W(\mathfrak{m}_m)$ et vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{fant}_n(\varpi_m) = \pi_{m-n} \quad (12)$$

.

Corollaire 2.4. Soit m un entier naturel. L'image du vecteur de Witt ϖ_m par le morphisme de Frobenius est égale à ϖ_{m-1} si $m \geq 1$, et à $\mathbf{0}$ si $m = 0$.

Soit F^Δ la série entière à coefficients dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z}_p)$ obtenue en remplaçant chaque coefficient de la série de Lubin-Tate par son image par le morphisme Δ de la proposition 1.23. Nous allons calculer l'image de la série $F^\Delta(T)$ par le morphisme d'évaluation $\text{ev}_{\varpi_m, \mathfrak{m}_m} : \mathbf{W}(\mathcal{O}_m)[[T]] \rightarrow \mathbf{W}(\mathcal{O}_m)$ déterminé en conformité avec la proposition 1.32.

Proposition 2.5. Soit m un entier naturel. On a

$$\text{ev}_{\varpi_m, \mathfrak{m}_m}(F^\Delta(T)) = \begin{cases} \varpi_{m-1} & \text{si } m \geq 1 \\ \mathbf{0} & \text{si } m = 0 \end{cases}.$$

Démonstration : D'après la proposition 1.33, on sait que

$$\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\text{ev}_{\varpi_m, \mathfrak{m}_m}(F^\Delta(T))) = \text{sv}_{\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_m), \mathfrak{m}_m}(\text{fant}_T(F^\Delta(T))).$$

Or, par la définition 1.23 et celle du morphisme S_T de la proposition 1.4, on a

$$\text{fant}_T(F^\Delta(T)) = S_T(F(T)).$$

Par la proposition 1.4, on a

$$\kappa_n(\text{sv}_{\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_m), \mathfrak{m}_m}(\text{fant}_T(F^\Delta(T)))) = \varepsilon_{\kappa_n(\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_m))}(F(T)).$$

Or $\kappa_n(\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_m)) = \pi_{m-n}$. Donc

$$\kappa_n(\text{sv}_{\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_m), \mathfrak{m}_m}(\text{fant}_T(F^\Delta(T)))) = F(\pi_{m-n}) = \pi_{m-1-n}.$$

On en tire pour $m \geq 1$

$$\text{sv}_{\text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_m), \mathfrak{m}_m}(\text{fant}_T(F^\Delta(T))) = \langle \pi_{m-1-n} \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \text{fant}_{\mathcal{O}_m}(\varpi_{m-1}),$$

et pour $m = 0$

$$\text{sv}_{\text{fant}_{\mathcal{O}_0}(\varpi_0), \mathfrak{m}_0}(\text{fant}_T(F^\Delta(T))) = \langle \pi_{-1-n} \rangle_{n \in \mathbb{N}} = \text{fant}_{\mathcal{O}_0}(\mathbf{0}).$$

Comme p n'est pas diviseur de zéro dans \mathcal{O}_m , l'application $\text{fant}_{\mathcal{O}_m}$ est injective, ce qui permet de conclure à l'égalité désirée. \square

2.3 Exponentielle de Robba

Définition 2.3. Soit $\pi = (\pi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ un générateur de Tate relativement à une série de Lubin-Tate $F(T)$ pour l'uniformisante p de \mathbb{Z}_p , et fixons un entier $m \in \mathbb{N}$. On associe à ces données l'exponentielle de Robba [15] qui est par définition la série entière formelle à coefficients dans l'anneau \mathcal{O}_m notée $e_{m,\pi}(x)$ telle que

$$e_{m,\pi} = E(\varpi_m) = \exp(\pi_m x + \pi_{m-1} p^{-1} x^p + \dots + \pi_0 p^{-m} x^{p^m}).$$

Proposition 2.6. *Le rayon de convergence de l'exponentielle de Robba $e_{m,\pi}$ est au moins égal à 1.*

Démonstration : Comme le vecteur de Witt ϖ_m est élément de l'anneau $\mathbf{W}(\mathcal{O}_m)$, son image $e_{m,\pi}(x)$ par le morphisme de Artin-Hasse est élément du groupe $\Lambda(\mathcal{O}_m)$. Or toute série à coefficients entiers converge sur le disque ouvert de \mathbb{C}_p de rayon 1. \square

Lemme 2.7. *Soit A un anneau contenant $\mathcal{O}_m = \mathbb{Z}_p[\pi_m]$ et $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un vecteur de Witt de $\mathbf{W}(A)$. On a l'identité*

$$E(\varpi_m \mathbf{a}) = \prod_{i=0}^m e_{m-i,\pi} \left(a_i x^{p^i} \right). \quad (13)$$

Démonstration : On sait par la proposition 1.21 que

$$\mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} V^i(\boldsymbol{\tau}(a_i)) .$$

On en déduit que

$$\boldsymbol{\varpi}_m \mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\varpi}_m V^i(\boldsymbol{\tau}(a_i)) .$$

D'après la proposition 1.17, on obtient

$$\boldsymbol{\varpi}_m \mathbf{a} = \sum_{i=0}^{\infty} V^i(\text{Frob}^i(\boldsymbol{\varpi}_m) \boldsymbol{\tau}(a_i)) ,$$

ce qui fournit, d'après le lemme 2.4, l'identité

$$\boldsymbol{\varpi}_m \mathbf{a} = \sum_{i=0}^m V^i(\boldsymbol{\varpi}_{m-i} \boldsymbol{\tau}(a_i)) .$$

D'après la proposition 2.1, cette dernière identité entre vecteurs de Witt implique que

$$E(\boldsymbol{\varpi}_m \mathbf{a}) = \prod_{i=0}^m E(V^i(\boldsymbol{\varpi}_{m-i} \boldsymbol{\tau}(a_i))) = \prod_{i=0}^m E(\boldsymbol{\varpi}_{m-i} \circ (a_i x^{p^i})),$$

ce qui est la formule à démontrer. \square

La proposition 2.6 et le lemme 2.7 entraînent le corollaire suivant.

Corollaire 2.8. *Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un vecteur de Witt de $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$. Si on a $|a_i| < 1$ pour tout indice $i \in [0, m]$, le rayon de convergence de la fonction $E(\boldsymbol{\varpi}_m \mathbf{a})$ est strictement plus grand que 1.*

2.4 Exponentielle de Pulita

2.4.1 Frobenius absolu

Soit $\mathcal{O} = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_m$ la sous- \mathbb{Z}_p -algèbre de \mathbb{C}_p engendrée par les racines des puissances de composition de la série de Lubin-Tate $F(T)$. C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}} = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_m$ et de corps résiduel \mathbb{F}_p . On note K le corps des fractions de l'anneau \mathcal{O} , de sorte que $K = \cup_{m \in \mathbb{N}} K_m$.

Proposition 2.9. *Il existe un automorphisme continu φ du corps valué \mathbb{C}_p tel qu'on ait $\varphi(x) = x$ pour tout x de K et $|\varphi(x) - x^p| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}_p$ tel que $|x| \leq 1$.*

Nous appelons Frobenius absolu tout automorphisme de \mathbb{C}_p satisfaisant les conditions de la proposition 2.9. Un tel automorphisme n'est pas unique, mais nous en fixerons un dans la suite, constamment noté φ . Pour un vecteur de Witt \mathbf{a} sur \mathbb{C}_p , nous notons \mathbf{a}^φ le vecteur image de \mathbf{a} par l'automorphisme $\mathbf{W}(\varphi)$.

Lemme 2.10. *Si $t \in \mathbb{C}_p$ est une racine de l'unité d'ordre premier à p , alors $\varphi(t) = t^p$.*

Démonstration : Les éléments $\varphi(t)$ et t^p sont deux racines de l'unité d'ordre r premier à p , alors que, par définition de φ , on sait que leurs classes dans le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ coïncident. Comme le polynôme $T^r - 1$ n'a que des racines simples dans le corps $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ de caractéristique p , il en résulte que $\varphi(t) = t^p$. \square

En comparant la valeur absolue $|\cdot|$ de \mathbb{C}_p à la valeur absolue $x \mapsto |\varphi(x)|$, on voit facilement [1, p. 4] que le Frobenius absolu est nécessairement une isométrie de \mathbb{C}_p .

Lemme 2.11. *Si I est un idéal de l'anneau \mathbb{C}_p° , alors $\varphi(I) \subseteq I$.*

Démonstration : Soit x un élément de I . Puisque φ est une isométrie, le quotient $\frac{\varphi(x)}{x}$ a une valeur absolue égale à 1, donc est élément de l'anneau des entiers \mathbb{C}_p° . Par conséquent $\varphi(x) \in x\mathbb{C}_p^\circ \subseteq I$. \square

La propriété évidente suivante nous sera utile ultérieurement.

Assertion 2.12. *Le Frobenius absolu commute avec le décalage et le Frobenius de $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$.*

2.4.2 Définition de la série exponentielle de Pulita

Définition 2.4. Soit m un entier naturel et \mathbf{a} un vecteur de Witt sur \mathbb{C}_p . L'exponentielle de Pulita attachée à ces données est la série

$$\theta_m(\mathbf{a}) = \frac{E(\varpi_m \mathbf{a})(x)}{E(\varpi_m \mathbf{a}^\varphi)(x^p)}.$$

D'après la proposition 2.1, l'exponentielle de Pulita s'exprime sous la forme

$$\theta_m(\mathbf{a}) = E(\varpi_m \mathbf{a} - V(\varpi_m \mathbf{a}^\varphi)). \quad (14)$$

En particulier, l'application θ_m est un morphisme du groupe additif $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$ dans le groupe multiplicatif $\Lambda(\mathbb{C}_p)$.

Lemme 2.13. *Soit I un idéal de l'anneau \mathbb{C}_p° , et \mathbf{a} un élément de $\mathbf{W}(I)$. Alors tous les coefficients de la série $\theta_m(\mathbf{a}) - 1$ sont éléments de l'idéal $\pi_m I$.*

Démonstration : D'après le lemme 2.2 et l'égalité (14), il suffit de montrer que le vecteur $\varpi_m \mathbf{a} - V(\varpi_m \mathbf{a}^\varphi)$ est élément de l'idéal $\mathbf{W}(\pi_m I)$. D'après le lemme 2.3 et l'équation (11) qui définit le morphisme d'évaluation en π_m , il est clair que le vecteur ϖ_m est élément du groupe $\mathbf{W}(\pi_m \mathbb{Z}_p[\pi_m])$, et donc de l'idéal $\mathbf{W}(\pi_m \mathbb{C}_p^\circ)$ de l'anneau des vecteurs de Witt sur \mathbb{C}_p° . D'autre part, on sait par le lemme 2.11 que le vecteur \mathbf{a}^φ est aussi élément de $\mathbf{W}(I)$. En utilisant la proposition 1.28, on en déduit que les vecteurs $\varpi_m \mathbf{a}$ et $\varpi_m \mathbf{a}^\varphi$ sont éléments de l'idéal $\mathbf{W}(\pi_m I)$. D'où le résultat désiré. \square

Nous désirons maintenant préciser les morphismes $\theta_m \circ V_{\mathbb{C}_p}^k$, où $k \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.14. *Soit un vecteur de Witt \mathbf{a} sur \mathbb{C}_p° , et deux entiers naturels m et k , alors*

$$\theta_m(V^k(\mathbf{a})) = \begin{cases} 1 & \text{si } m < k \\ \theta_{m-k}(\mathbf{a}) \circ x^{p^k} & \text{si } m \geq k \end{cases}.$$

Démonstration : Dans le cas où $m < k$, on a $\text{fant}_{\mathbb{C}_p}(\varpi_m) \text{fant}_{\mathbb{C}_p}(V^k(\mathbf{a})) = 0$. Comme l'application fantôme $\text{fant}_{\mathbb{C}_p}$ est injective, ceci montre que $\varpi_m V^k(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. De même, en utilisant l'assertion 2.12, on voit que $\varpi_m V^k(\mathbf{a})^\varphi = \mathbf{0}$. Il résulte alors de l'équation (14) que $\theta_m(V^k(\mathbf{a})) = 1$.

Supposons maintenant que $m \geq k$. La formule à montrer étant évidemment vraie pour $k = 0$, sa validité pour tout $k \geq m$ suit par récurrence de sa validité pour $k = 1 \geq m$;

on suppose donc que $k = 1 \geq m$. Alors, par la formule (14), on a

$$\theta_m(V(\mathbf{a})) = E(\varpi_m V(\mathbf{a}) - V(\varpi_m V(\mathbf{a}^\varphi))).$$

Or, utilisant la proposition 1.17, on obtient

$$V(\mathbf{a}) = V(\text{Frob}(\varpi_m)\mathbf{a}) - V^2(\text{Frob}(\varpi_m)\mathbf{a}^\varphi) = V(\text{Frob}(\varpi_m)(\mathbf{a}) - V(\text{Frob}(\varpi_m)\mathbf{a}^\varphi),$$

c'est à dire, d'après le lemme 2.4,

$$\theta_m(V(\mathbf{a})) = E(V(\varpi_{m-1}\mathbf{a} - V(\varpi_{m-1}\mathbf{a}^\varphi))),$$

ce qui, d'après la formule (6) et la définition 2.4 de θ_{m-1} , conduit à l'égalité désirée

$$\theta_m(V(\mathbf{a})) = \theta_{m-1}(\mathbf{a}) \circ x^p.$$

□

Lemme 2.15. *Soit t une racine de l'unité d'ordre premier à p . Alors on a*

$$\theta_m(\boldsymbol{\tau}(t)) = \theta_m(\mathbf{1}) \circ (tx).$$

Démonstration : Par le lemme 2.10, on sait que $\varphi(t) = t^p$. Utilisant alors le lemme 1.20, on en déduit que $\boldsymbol{\tau}(t)^\varphi = \boldsymbol{\tau}(\varphi(t)) = \boldsymbol{\tau}(t^p) = \text{Frob}(\boldsymbol{\tau}(t))$. D'où, par la proposition 1.17, les égalités

$$\varpi_m \boldsymbol{\tau}(t) - V(\varpi_m \boldsymbol{\tau}(t)^\varphi) = \varpi_m \boldsymbol{\tau}(t) - \boldsymbol{\tau}(t)V(\varpi_m) = \boldsymbol{\tau}(t)(\varpi_m - V(\varpi_m)).$$

Par la formule (8) de la proposition 2.1, on en déduit

$$\theta_m(\boldsymbol{\tau}(t)) = E(\boldsymbol{\tau}(t)(\varpi_m - V(\varpi_m))) = E(\varpi_m - V(\varpi_m)) \circ (tx),$$

ce qui est l'égalité voulue.

□

2.4.3 Rayon de convergence des séries de Pulita

Lemme 2.16. *Pour tout entier naturel m , il existe un vecteur de Witt \mathbf{b}_m élément de l'idéal $\mathbf{W}(\mathfrak{m}_{m+1})$ de l'anneau $\mathbf{W}(\mathcal{O}_{m+1})$ tel que*

$$\varpi_m = \varpi_{m+1}(\mathbf{b}_m + p \cdot \mathbf{1}). \quad (15)$$

Démonstration : Par définition, il existe une série $G(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ telle que la série de Lubin-Tate $F(T)$ est de la forme donnée par l'équation (9), et donc

$$F(T) = T \left(p + T^{p-1} + pTG(T) \right).$$

Soit $G^\Delta(T)$ la série à coefficients dans l'anneau $\mathbf{W}(\mathbb{Z}_p) \subset \mathbf{W}(\mathcal{O}_{m+1})$ obtenue en remplaçant les coefficients de la série $G(T)$ par leurs images par le morphisme Δ de la définition 1.23. On a

$$F^\Delta(T) = T \left(p \cdot \mathbf{1} + T^{p-1} + (p \cdot \mathbf{1})TG^\Delta(T) \right).$$

Par la proposition 2.5, on a donc

$$\varpi_m = \varpi_{m+1}(p \cdot \mathbf{1} + \mathbf{b}_m),$$

en posant

$$\mathbf{b}_m = \varpi_{m+1}^{p-1} + (p \cdot \mathbf{1})\varpi_{m+1} \text{ev}_{\varpi_{m+1}, \mathfrak{m}_{m+1}}(G^\Delta(T)),$$

qui est élément de l'idéal $\mathbf{W}(\mathfrak{m}_{m+1})$ puisqu'il est divisible par ϖ_{m+1} . \square

Lemme 2.17. *Pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur l'anneau \mathbb{C}_p° des entiers de \mathbb{C}_p , les composantes du vecteur $\text{Frob}_{\mathbb{C}_p}(\mathbf{a}) - \mathbf{a}^\varphi$ sont éléments de l'idéal maximal $\mathbb{C}_p^\vee = \{x \in \mathbb{C}_p, |x| < 1\}$.*

Démonstration : Considérons le morphisme $\rho : \mathbb{C}_p^\circ \rightarrow \widetilde{\mathbb{C}_p} = \mathbb{C}_p^\circ / C_p^\vee$ de réduction modulo l'idéal maximal \mathbb{C}_p^\vee . On note $\tilde{\varphi}$ l'automorphisme $\tilde{x} \mapsto \tilde{x}^p$ de Frobenius du corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$. On a l'égalité $\tilde{\varphi} \circ \rho = \rho \circ \varphi$ par définition de l'automorphisme de Frobenius φ de \mathbb{C}_p . On a donc les deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ) & \xrightarrow{\mathbf{W}(\rho)} & \mathbf{W}(\widetilde{\mathbb{C}}_p) \\
\text{Frob}_{\mathbb{C}_p^\circ} \downarrow & & \downarrow \text{Frob}_{\widetilde{\mathbb{C}}_p} \\
\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ) & \xrightarrow{\mathbf{W}(\rho)} & \mathbf{W}(\widetilde{\mathbb{C}}_p)
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ) & \xrightarrow{\mathbf{W}(\rho)} & \mathbf{W}(\widetilde{\mathbb{C}}_p) \\
\mathbf{W}(\varphi) \downarrow & & \downarrow \mathbf{W}(\widetilde{\varphi}) \\
\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ) & \xrightarrow{\mathbf{W}(\rho)} & \mathbf{W}(\widetilde{\mathbb{C}}_p)
\end{array} .$$

Soit \mathbf{a} un vecteur de Witt sur \mathbb{C}_p° . Par la commutativité du premier diagramme, on a

$$\text{Frob}_{\widetilde{\mathbb{C}}_p}(\mathbf{W}(\rho)(\mathbf{a})) = \mathbf{W}(\rho)(\text{Frob}_{\mathbb{C}_p^\circ}(\mathbf{a})).$$

D'autre part, en vertu de la remarque 1.8, et comme $\widetilde{\mathbb{C}}_p$ est un corps de caractéristique p , on sait que l'automorphisme $\mathbf{W}(\widetilde{\varphi})$ coïncide avec le Frobenius $\text{Frob}_{\widetilde{\mathbb{C}}_p}$. Par conséquent, la commutativité du deuxième diagramme entraîne l'égalité

$$\text{Frob}_{\widetilde{\mathbb{C}}_p}(\mathbf{W}(\rho)(\mathbf{a})) = \mathbf{W}(\rho)(\mathbf{W}(\varphi)(\mathbf{a})).$$

On en déduit que

$$\mathbf{W}(\varphi)(\mathbf{a}) - \text{Frob}_{\mathbb{C}_p^\circ}(\mathbf{a}) \in \ker(\mathbf{W}(\rho)) = \mathbf{W}(\ker \rho) = \mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\vee).$$

□

Corollaire 2.18. *Pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur l'anneau des entiers \mathbb{C}_p° de \mathbb{C}_p , la différence $p\mathbf{a} - V_{\mathbb{C}_p}(\mathbf{a}^\varphi)$ est élément de l'idéal $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\vee)$, où \mathbb{C}_p^\vee est l'idéal maximal de \mathbb{C}_p° .*

Démonstration : Il suffit de remplacer dans l'énoncé du lemme 2.17 le vecteur \mathbf{a} par le vecteur $V_{\mathbb{C}_p}(\mathbf{a})$ en utilisant la relation (1). \square

Corollaire 2.19. *Pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur l'anneau des entiers \mathbb{C}_p° de \mathbb{C}_p , et pour tout entier naturel m , la différence $p^m \mathbf{a} - V_{\mathbb{C}_p}^m(\mathbf{a}^\varphi)$ est élément de l'idéal $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\vee)$.*

Démonstration : Récurrence sur m . \square

Proposition 2.20. *Pour tout entier naturel m et pour tout élément \mathbf{a} de l'anneau $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)$, la série exponentielle de Pulita $\theta_m(\mathbf{a})$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1.*

Démonstration : On sait par la relation (14) que la série $\theta_m(\mathbf{a})$ est l'image par le morphisme E d'Artin-Hasse du vecteur $\varpi_m \mathbf{a} - V(\varpi_m \mathbf{a}^\varphi)$. Or, d'après le corollaire 2.4 et le lemme 2.16, on a

$$\varpi_m \mathbf{a} - V(\varpi_m \mathbf{a}^\varphi) = \varpi_{m+1} (b_m \mathbf{a} + p \mathbf{a} - V(\mathbf{a}^\varphi)).$$

pour un certain vecteur b_m appartenant à l'idéal $\mathbf{W}(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}})$ de l'anneau $\mathbf{W}(\mathcal{O})$. Par le corollaire 2.18, on voit que le vecteur $b_m \mathbf{a} + p \mathbf{a} - V(\mathbf{a}^\varphi)$ est élément de $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\vee)$. D'où le résultat en vertu du corollaire 2.8. \square

2.5 Morphismes de Pulita

Nous allons maintenant étudier des morphismes de $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)$ dans $\Lambda(\mathbb{C}_p^\circ)$ construits à l'aide des morphismes θ_m . Ces morphismes seront introduits à partir d'une généralisation des exponentielles de Pulita.

2.5.1 Séries exponentielles de Pulita généralisées

Notation 2.5. Pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur \mathbb{C}_p , et pour tout couple (m, s) d'entiers naturels tel que $s \geq 1$, on note $\theta_{m,s}(\mathbf{a})$ la série

$$\theta_{m,s}(\mathbf{a}) = \prod_{i=0}^{s-1} \theta_m(\mathbf{a}^{\varphi^i}) \circ x^{p^i}. \quad (16)$$

Comme le facteur $\theta_m(\mathbf{a}^{\varphi^i}) \circ x^{p^i}$ figurant dans le membre de droite de l'identité (16) est l'image par le morphisme d'Artin-Hasse du vecteur $V^i \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^i} - V \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{i+1}} \right) \right)$, on voit que

$$\theta_{m,s}(\mathbf{a}) = E \left(\varpi_m \mathbf{a} - V^s \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^s} \right) \right) .$$

En particulier, l'application $\theta_{m,s}$ est un morphisme du groupe additif $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$ dans le groupe multiplicatif $\Lambda(\mathbb{C}_p)$. On remarque que $\theta_{m,1} = \theta_m$, ce qui justifie le nom d'exponentielle de Pulita généralisée.

Lemme 2.21. *Soit m et s deux entiers naturels tels que $s \geq 1$, I un idéal de l'anneau \mathbb{C}_p° , et \mathbf{a} un élément de $\mathbf{W}(I)$. Alors tous les coefficients de la série $\theta_{m,s}(\mathbf{a}) - 1$ sont éléments de l'idéal $\pi_m I$.*

Démonstration : Résulte de l'identité (16) et des lemmes 2.11 et 2.13. \square

Lemme 2.22. *Pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur \mathbb{C}_p , et pour tout triplet (m, s, k) d'entiers naturels tel que $s \geq 1$ et $k \leq m$, on a $\theta_{m,s}(V^k(\mathbf{a})) = \theta_{m-k,s}(\mathbf{a}) \circ x^{p^k}$.*

Démonstration : Par définition

$$\theta_{m,s}(V^k(\mathbf{a})) = \prod_{i=0}^{s-1} \theta_m(V^k \mathbf{a}^{\varphi^i}) \circ x^{p^i},$$

alors, d'après le lemme 2.14

$$\theta_{m,s}(V^k(\mathbf{a})) = \prod_{i=0}^{s-1} \theta_{m-k}(\mathbf{a}^{\varphi^i}) \circ x^{p^k} \circ x^{p^i},$$

et comme $x^{p^k} \circ x^{p^i} = x^{p^i} \circ x^{p^k}$, on a donc

$$\theta_{m,s}(V^k(\mathbf{a})) = \prod_{i=0}^{s-1} \theta_{m-k}(\mathbf{a}^{\varphi^i}) \circ x^{p^i} \circ x^{p^k},$$

on obtient le résultat désiré:

$$\theta_{m,s}(V^k(\mathbf{a})) = \theta_{m-k,s}(\mathbf{a}) \circ x^{p^k}.$$

\square

Lemme 2.23. *Soit m et s deux entiers naturels tels que $s \geq 1$. Si $t \in \mathbb{C}_p$ est une racine de l'unité d'ordre premier à p , alors*

$$\theta_{m,s}(\tau(t)) = \theta_{m,s}(\mathbf{1}) \circ (tx) .$$

Démonstration : Résulte de la définition du morphisme $\theta_{m,s}$ et des lemmes 2.10 et 2.15. \square

Lorsque s varie, les séries $\theta_{m,s}$ satisfont une propriété de transitivité, exprimée par le lemme suivant.

Lemme 2.24. *Soit \mathbf{a} un vecteur de Witt sur \mathbb{C}_p , et $m, r \geq 1, s \geq 1$ trois entiers naturels. On a la factorisation*

$$\theta_{m,sr}(\mathbf{a}) = \prod_{j=0}^{r-1} \theta_{m,s}(\mathbf{a}^{\varphi^{js}}) \circ x^{p^{sj}} .$$

Démonstration : Comme le facteur $\theta_{m,s}(\mathbf{a}^{\varphi^{js}}) \circ x^{p^{sj}}$ figurant dans le membre de droite de l'identité à montrer est l'image par le morphisme d'Artin-Hasse E du vecteur $V^{sj} \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{js}} - V^s \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{(j+1)s}} \right) \right)$, on voit que leur produit est l'image par E de la somme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{r-1} V^{sj} \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{js}} - V^s \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{(j+1)s}} \right) \right) &= \sum_{j=0}^{r-1} \left(V^{sj} \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{js}} \right) - V^{s(j+1)} \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{(j+1)s}} \right) \right) = \\ &= \varpi_m \mathbf{a} - V^{sr} \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{rs}} \right) \end{aligned}$$

Or on sait que justement

$$\theta_{m,sr}(\mathbf{a}) = E \left(\varpi_m \mathbf{a} - V^{sr} \left(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^{rs}} \right) \right) .$$

\square

Proposition 2.25. *Pour tout couple (m, s) d'entiers naturels tel que $s \geq 1$, et pour tout vecteur de Witt \mathbf{a} sur l'anneau \mathbb{C}_p° des entiers de \mathbb{C}_p , la série $\theta_{m,s}(\mathbf{a})$ a un rayon de convergence > 1 .*

Démonstration : D'après la proposition 2.20, tous les facteurs du membre de droite de l'identité (16) sont des séries de rayon de convergence > 1 . \square

2.5.2 Les morphismes $\bar{\theta}_{m,s}$

Lemme 2.26. *L'idéal $V^{m+1}\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$ est contenu dans le noyau du morphisme $\theta_{m,s}$.*

Démonstration : Soit \mathbf{a} un vecteur de Witt élément de $V^{m+1}\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$. On peut écrire $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_i = 0$ pour tout indice $i \leq m$, et donc $\text{fant}_n(\mathbf{a}) = 0$ pour tout entier $n \in [0..m]$. Comme $\text{fant}_n(\varpi_m) = \pi_{m-n} = 0$ pour tout entier $n > m$, on en déduit que toutes les composantes fantômes du vecteur $\varpi_m \mathbf{a}$ sont nulles. Comme p est inversible dans le corps \mathbb{C}_p , l'application fantôme $\text{fant}_{\mathbb{C}_p}$ est bijective. Donc $\varpi_m \mathbf{a} = \mathbf{0}$. D'autre part, en vertu de la remarque 1.18, le vecteur \mathbf{a}^{φ^s} est aussi élément de $V^{m+1}\mathbf{W}(\mathbb{C}_p)$, donc on a aussi $\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^s} = \mathbf{0}$.

Finalement, on voit que $\varpi_m \mathbf{a} - V_{\mathbb{C}_p}^s(\varpi_m \mathbf{a}^{\varphi^s}) = \mathbf{0}$, et donc $\theta_{m,s}(\mathbf{a}) = 1$. \square

Notation 2.6. On définit $\Lambda^*(\mathbb{C}_p^\circ)$ comme le sous-groupe de $\Lambda(\mathbb{C}_p)$ constitué des séries entières formelles à coefficients éléments de \mathbb{C}_p° dont le terme constant est égal à 1, et dont le rayon de convergence, ainsi que celui de leur inverse, est > 1 .

Lemme 2.27. *L'image par le morphisme $\theta_{m,s}$ du sous-anneau $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)$ est contenue dans le sous-groupe $\Lambda^*(\mathbb{C}_p^\circ)$.*

Démonstration : Soit un vecteur de Witt \mathbf{a} sur \mathbb{C}_p° . D'après la proposition 2.25, la série $\theta_{m,s}(\mathbf{a})$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1. D'autre part son inverse est $\theta_{m,s}(-\mathbf{a})$ qui a un rayon de convergence > 1 car $-\mathbf{a}$ est aussi un vecteur de Witt sur \mathbb{C}_p° . \square

Proposition 2.28. *Le morphisme $\theta_{m,s} : \mathbf{W}(\mathbb{C}_p) \rightarrow \Lambda(\mathbb{C}_p)$ induit un unique morphisme*

$$\bar{\theta}_{m,s} : \mathbf{W}_{m+1}(\mathbb{C}_p^\circ) \rightarrow \Lambda^*(\mathbb{C}_p^\circ) .$$

Démonstration : D'après le lemme 2.27, la restriction du morphisme $\theta_{m,s}$ au sous-anneau $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)$ induit un unique morphisme de $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)$ dans $\Lambda^*(\mathbb{C}_p^\circ)$. Par le lemme 2.26, et comme l'anneau $\mathbf{W}_{m+1}(\mathbb{C}_p^\circ)$ est isomorphe au quotient $\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)/V^{m+1}\mathbf{W}(\mathbb{C}_p^\circ)$ d'après la proposition 1.34, le résultat suit. \square

3 Expression des caractères de $W_\ell(\mathbb{F}_q)$

Dans cette section, on fixe un entier naturel $s \geq 1$, et on pose $q = p^s$.

3.1 Caractère de Teichmüller d'un corps fini

On note μ_{q-1} le groupe des racines de l'unité dans \mathbb{C}_p d'ordre divisant $q - 1$. Le sous-anneau $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ de \mathbb{C}_p est l'anneau des entiers de l'extension $\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})$ non ramifiée du corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques, de sorte que son corps résiduel est d'ordre q . Il existe donc au moins un (et en fait exactement s) morphismes d'anneaux, dits de réduction, de $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ sur le corps \mathbb{F}_q . On supposera qu'on en a choisi un, noté $x \mapsto \tilde{x}$. Ceci nous permet d'introduire un caractère de Teichmüller du corps \mathbb{F}_q comme suit.

Notation 3.1. Pour $x \in \mathbb{F}_q$, on note $\text{Teich}(x)$ l'unique élément de $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $\text{Teich}(x)^q = \text{Teich}(x)$ et $\widetilde{\text{Teich}(x)} = x$.

L'existence et l'unicité de l'élément $\text{Teich}(x)$ résulte immédiatement du lemme de Hensel. On a ainsi défini une application

$$\text{Teich} : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}_p$$

qui est un générateur du groupe des caractères multiplicatifs de \mathbb{F}_q . C'est cette application qui est appelé caractère de Teichmüller.

Une propriété utile du caractère de Teichmüller est la suivante.

Proposition 3.1. *Soit $x \in \mathbb{F}_q$. Alors on a l'identité*

$$\text{Frob}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]}(\tau(\text{Teich}(x))) = \tau(\text{Teich}(x^p)) .$$

Démonstration : Cas particulier de la proposition 1.20. □

Lemme 3.2. *Soit K le corps des fractions de l'anneau $\mathcal{O} = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_m$, φ un automorphisme de Frobenius absolu satisfaisant les conditions de la proposition 2.9. Alors, pour*

tout élément $x \in \mathbb{F}_q$, on a $\varphi(\text{Teich}(x)) = \text{Teich}(x^p)$. De plus la puissance φ^s d'ordre s de φ fixe tous les éléments du corps $K[\mu_{q-1}]$.

Démonstration : L'élément $\varphi(\text{Teich}(x))$ appartient à l'anneau $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$, est égal à sa puissance d'ordre q , et sa réduction est égale à x^p , puisqu'on sait par définition de φ que $|\varphi(\text{Teich}(x)) - \text{Teich}(x)^p| < 1$. Ceci montre que $\varphi(\text{Teich}(x)) = \text{Teich}(x^p)$. Par définition, on sait que φ fixe les points de K , il suffit donc de vérifier que $\varphi^s(t) = t$ pour tout élément t de μ_{q-1} . Or on a $t = \text{Teich}(x)$, où $x = \tilde{t}$ est la réduction de t dans \mathbb{F}_q . Il en résulte que $\varphi^s(t) = \varphi^s(\text{Teich}(x)) = \text{Teich}(x^{p^s}) = \text{Teich}(x) = t$. \square

3.2 Evaluation des séries de Pulita

Pour toute série $G \in \mathbb{C}_p[[x]]$ dont le rayon de convergence est > 1 , et pour tout $z \in \mathbb{C}_p^\circ$, on note $G(z)$ la valeur de G en z . On obtient ainsi un morphisme $G \mapsto G(z)$ du groupe $\Lambda^*(\mathbb{C}_p^\circ)$ dans le groupe \mathbb{C}_p^\times , que nous appelons morphisme d'évaluation en z . En particulier, si \mathbf{a} est un vecteur de Witt sur \mathbb{C}_p° , on peut calculer $\theta_m(\mathbf{a})(z)$ en tout point z de l'anneau des entiers de \mathbb{C}_p .

Lemme 3.3. Soit $s \geq 1$ un entier naturel et $t \in \mathbb{C}_p$ tel que $t^q = t$, où on a posé $q = p^s$. Si \mathbf{a} est un vecteur de Witt dont toutes les composantes sont éléments de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]}$ de l'anneau $\mathcal{O}[\mu_{q-1}] = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_m[\mu_{q-1}]$, alors, pour tout entier $\ell \geq 1$, on a $\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a})(t) = 1$.

Démonstration : Soit $\mathbf{a} \in \mathbf{W}(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]})$. Comme l'automorphisme φ^s laisse fixe tout élément du corps $K[\mu_{q-1}]$ par le lemme 3.2, on a $\mathbf{a}^{\varphi^s} = \mathbf{a}$. On sait par le corollaire 2.8 que $E(\varpi_{\ell-1}\mathbf{a}) = E(\varpi_{\ell-1}\mathbf{a}^{\varphi^s})$ a un rayon de convergence > 1 . Puisque $t = t^{p^s}$, les deux nombres $E(\varpi_{\ell-1}\mathbf{a})(t)$ et $E(\varpi_{\ell-1}\mathbf{a}^{\varphi^s})(t^{p^s})$ sont égaux, d'où on déduit que leur rapport $\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a})(t)$ est 1. \square

Lemme 3.4. Soit z un élément de \mathbb{C}_p° et $\ell \geq 1$ un entier naturel. La valeur en z de la série de Pulita $\theta_{\ell-1}(\mathbf{1})$ est congrue à $1 + \pi_{\ell-1}z$ modulo l'idéal $\pi_{\ell-1}^2\mathbb{C}_p^\circ$.

Démonstration : Considérons l'anneau $A = \mathbb{Z}_p[[T]]$, son idéal $T^2\mathbb{Z}_p[[T]]$ et le vecteur de Witt $\mathbf{w} - V(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\tau}(T)$ de $\mathbf{W}(A)$, où \mathbf{w} est l'unique vecteur de Witt sur l'anneau $\mathbb{Z}_p[[T]]$ dont la suite des composantes fantômes est la suite $\langle F^{\circ n}(T) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de composition de la série de Lubin-Tate $F(T)$ (Lemme 2.3). Utilisons le lemme suivant.

Lemme 3.5. *Toutes les composantes fantômes du vecteur $\mathbf{w} - V(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\tau}(T)$ sont éléments de l'idéal $T^2\mathbb{Z}_p[[T]]$.*

Démonstration : On a

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \text{fant}_j(\mathbf{w} - V(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\tau}(T)) = \begin{cases} F^{\circ j}(T) - pF^{\circ(j-1)}(T) - T^{p^j} & \text{si } j \geq 1 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases}.$$

Comme $F(T)$ est une série de Lubin-Tate, il existe une série $G(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$ telle que $F(T) = pT + T^p + pT^2G(T)$, donc, pour $j \geq 1$, on a

$$F^{\circ j}(T) - pF^{\circ(j-1)}(T) - T^{p^j} = F^{\circ(j-1)}(T)^p + pF^{\circ(j-1)}(T)^2G(F^{\circ(j-1)}(T)) - T^{p^j},$$

qui appartient à $T^2\mathbb{Z}_p[[T]]$ puisque la série entière formelle $F^{\circ(j-1)}(T)$ est divisible par T . \square

On déduit du lemme 3.5 et de la proposition 1.27 que le vecteur de Witt $\mathbf{w} - V(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\tau}(T)$ est élément de l'idéal $\mathbf{W}(T^2\mathbb{Z}_p[[T]])$. Comme l'homomorphisme $\varepsilon_{\pi_{\ell-1}} : \mathbb{Z}_p[[T]] \rightarrow \mathcal{O}_{\ell-1} = \mathbb{Z}_p[\pi_{\ell-1}]$ de spécialisation en $\pi_{\ell-1}$ défini par la relation (11) envoie l'idéal $T^2\mathbb{Z}_p[[T]]$ dans l'idéal $\pi_{\ell-1}^2\mathcal{O}_{\ell-1}$, l'image par le morphisme $\mathbf{W}(\varepsilon_{\pi_{\ell-1}})$ du vecteur $\mathbf{w} - V(\mathbf{w}) - \boldsymbol{\tau}(T)$, c'est-à-dire $\boldsymbol{\varpi}_{\ell-1} - V(\boldsymbol{\varpi}_{\ell-1}) - \boldsymbol{\tau}(\pi_{\ell-1})$, appartient à l'idéal $\mathbf{W}(\pi_{\ell-1}^2\mathcal{O}_{\ell-1})$. On peut donc écrire $\boldsymbol{\varpi}_{\ell-1} - V(\boldsymbol{\varpi}_{\ell-1})$ sous la forme $\boldsymbol{\tau}(\pi_{\ell-1}) + \mathbf{y}$, avec $\mathbf{y} \in \mathbf{W}(\pi_{\ell-1}^2\mathcal{O}_{\ell-1})$, de sorte que $E(\mathbf{y}) = 1 + \pi_{\ell-1}^2H(x)$ pour une certaine série $H \in \mathcal{O}_{\ell-1}[[x]]$. D'autre part $E(\boldsymbol{\tau}(\pi_{\ell-1})) = AH(\pi_{\ell-1}x) = 1 + \pi_{\ell-1}x + \pi_{\ell-1}^2H_1(x)$, où $H_1(x)$ est une série entière formelle élément de $\mathcal{O}_{\ell-1}[[x]]$. On a donc

$$E(\boldsymbol{\tau}(\pi_{\ell-1}) + \mathbf{y}) = (1 + \pi_{\ell-1}x + \pi_{\ell-1}^2H_1(x)) (1 + \pi_{\ell-1}^2H(x)) = 1 + \pi_{\ell-1}x + \pi_{\ell-1}^2H_2(x),$$

avec $H_2(x) = H(x) + H_1(x) + \pi_{\ell-1}^2 H(x)H_1(x)$ qui appartient à $\mathcal{O}_{\ell-1}[[x]]$. On voit donc que $\theta_{\ell-1}(\mathbf{1}) = E(\varpi_{\ell-1} - V(\varpi_{\ell-1})) = 1 + \pi_{\ell-1}x + \pi_{\ell-1}^2 H_2(x)$. Comme la série $\theta_{\ell-1}(\mathbf{1})$ a un rayon de convergence > 1 , il en est de même de la série $H_2(x)$, et on a $\theta_{\ell-1}(\mathbf{1})(z) = 1 + \pi_{\ell-1}z + \pi_{\ell-1}^2 H_2(z)$. Ce qui implique le résultat escompté. \square

Corollaire 3.6. *Soit z un élément de \mathbb{C}_p° et (ℓ, s) un couple d'entiers naturels non nuls. La valeur en z de la série $\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{1})$ est congrue à $1 + \pi_{\ell-1} \left(\sum_{j=0}^{s-1} z^{p^j} \right)$ modulo l'idéal $\pi_{\ell-1}^2 \mathbb{C}_p^\circ$.*

Démonstration : Par définition

$$\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{1}) = \prod_{i=0}^{s-1} (\theta_{\ell-1}(\mathbf{1}) \circ x^{p^i}),$$

d'où, vu le lemme 3.4, l'égalité

$$\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{1})(z) \equiv \prod_{i=0}^{s-1} \left(1 + \pi_{\ell-1} z^{p^i} \right) \pmod{\pi_{\ell-1}^2 \mathbb{C}_p^\circ}.$$

En développant le dernier produit, on obtient la congruence à montrer. \square

Proposition 3.7. *Soit ℓ et s deux entiers naturels non nuls, et a, z deux éléments de l'anneau \mathbb{C}_p° . Alors il existe un entier naturel r , et un élément t de \mathbb{C}_p° tel que $t^{p^r} - t = 0$ et $|a - t| < 1$. En posant $b = a - t$ si $|a - t| > |\pi_{\ell-1}|$, et $b = \pi_{\ell-1}$ dans le cas contraire, on a la congruence*

$$\theta_{\ell-1,s}(\tau(a))(z) \equiv 1 + \pi_{\ell-1} \left(\sum_{j=0}^{s-1} a^{p^j} z^{p^j} \right) \pmod{\pi_{\ell-1} b \mathbb{C}_p^\circ}.$$

Démonstration : La classe résiduelle \tilde{a} de a dans le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ de \mathbb{C}_p est algébrique sur \mathbb{F}_p , donc appartient à un corps fini isomorphe à \mathbb{F}_{p^r} pour un certain entier rationnel $r \geq 1$, d'où l'existence de l'entier naturel r tel que $\tilde{a}^{p^r} - \tilde{a} = 0$. D'après le lemme de Hensel, le polynôme $x^r - x$ admet une unique racine $t \in \mathbb{C}_p^\circ$ telle que $|a - t| < 1$. Passons maintenant au calcul de $\theta_{\ell-1,s}(\tau(a))$. Comme on a dans tous les cas l'inégalité $|a - t| \leq |b|$, le corollaire 1.26 entraîne la congruence $\tau(a) \equiv \tau(t)$

(mod $\mathbf{W}(b\mathbb{C}_p^\circ)$). D'après le lemme 2.21, on en déduit que la série $\theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(a) - \boldsymbol{\tau}(t)) - 1$ est élément de l'idéal $\pi_{\ell-1}bx\mathbb{C}_p^\circ[[x]]$. Par conséquent

$$\theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(a)) = \theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(a) - \boldsymbol{\tau}(t))\theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(t)) \equiv \theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(t)) \pmod{\pi_{\ell-1}bx\mathbb{C}_p^\circ[[x]]},$$

d'où l'on tire la congruence

$$\theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(a))(z) \equiv \theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(t))(z) \pmod{\pi_{\ell-1}b\mathbb{C}_p^\circ} \quad (17)$$

D'après le lemme 2.23, on a

$$\theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(t)) = \theta_{\ell-1,s}(\mathbf{1}) \circ (tx) .$$

Puisque $\pi_{\ell-1}b$ est toujours un diviseur de $\pi_{\ell-1}^2$ dans l'anneau \mathbb{C}_p° , on en déduit d'après le corollaire 3.6

$$\theta_{\ell-1,s}(\boldsymbol{\tau}(t))(z) \equiv 1 + \pi_{\ell-1} \left(\sum_{j=0}^{s-1} t^{p^j} z^{p^j} \right) \pmod{\pi_{\ell-1}b\mathbb{C}_p^\circ} . \quad (18)$$

Le résultat désiré suit des congruences (17) et (18) puisque $t \equiv a \pmod{b\mathbb{C}_p^\circ}$. \square

Proposition 3.8. *Soit $\mathbf{a} = (a_i)_{i \geq 0}$ un vecteur de Witt sur la clôture de l'extension non ramifiée maximale de $K_{\ell-1} = \mathbb{Q}_p[\pi_{\ell-1}]$ et z un entier de \mathbb{C}_p° . Alors la valeur $\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a})(z)$ est congrue à $1 + \pi_{\ell-1} \sum_{j=0}^{s-1} a_0^{p^j} z^{p^j}$ modulo l'idéal $\pi_{\ell-1}^2\mathbb{C}_p^\circ$.*

Démonstration : D'après la proposition 1.21, on a

$$\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a}) = \theta_{\ell-1,s} \left(\sum_{i=0}^{\infty} V^i(\boldsymbol{\tau}(a_i)) \right) = \theta_{\ell-1,s} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} V^i(\boldsymbol{\tau}(a_i)) \right) + \theta_{\ell-1,s} \left(\sum_{i=\ell}^{\infty} V^i(\boldsymbol{\tau}(a_i)) \right),$$

ce qui implique, en vertu du lemme 2.26 :

$$\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a}) = \theta_{\ell-1,s} \left(\sum_{i=0}^{\ell-1} V^i(\boldsymbol{\tau}(a_i)) \right)$$

ce qui, selon la proposition 2.23, conduit à

$$\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a}) = \prod_{i=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-1-i,s}(\boldsymbol{\tau}(a_i)) \circ x^{p^i}$$

Utilisons la proposition 3.7 : pour tout entier $i \in [0.. \ell - 1]$, il existe un entier naturel r_i et un élément $t_i \in \mathbb{C}_p^\circ$ tel que $t_i^{p^{r_i}} - t_i = 0$ et $|a_i - t_i| < 1$. Posons $b_i = \pi_{\ell-1-i}$ si $|a_i - t_i| \leq |\pi_{\ell-1-i}|$ et $b_i = a_i - t_i$ dans le cas contraire. Suivant la proposition 3.7, on a alors

$$\theta_{\ell-1-i,s}(\tau(a_i))(z) \equiv 1 + \pi_{\ell-1-i} \left(\sum_{j=0}^{s-1} a_i^{p^j} z^{p^j} \right) \pmod{\pi_{\ell-1-i} b_i \mathbb{C}_p^\circ}.$$

Observons que l'extension $\mathbb{Q}_p(t_i)/\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée, ce qui entraîne que l'extension $\mathbb{Q}_p(t_i, a_i)/K_{\ell-1}$ est non ramifiée sur $K_{\ell-1}$. Par conséquent $|t_i - a_i| \leq |\pi_{\ell-1}|$, et donc $|b_i| = \max(|t_i - a_i|, |\pi_{\ell-1-i}|) \leq |\pi_{\ell-1}|$. Pour $i > 0$, on a $\pi_{\ell-1-i} \in \pi_{\ell-1}^2 \mathbb{C}_p^\circ$, et on obtient

$$\theta_{\ell-1-i,s}(\tau(a_i))(z) \equiv 1 \pmod{\pi_{\ell-1}^2 \mathbb{C}_p^\circ}.$$

On conclut que

$$\theta_{\ell-1,s}(\mathbf{a})(z) \equiv 1 + \pi_{\ell-1} \left(\sum_{j=0}^{s-1} a_0^{p^j} z^{p^j} \right) \pmod{\pi_{\ell-1}^2 \mathbb{C}_p^\circ}.$$

□

3.3 Construction d'un caractère additif de $W_\ell(\mathbb{F}_q)$

Proposition 3.9. *Soit $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^{p^s} = t$. Le composé du morphisme $\bar{\theta}_{\ell-1,s}$ suivi du morphisme $\text{eval}_t : \Lambda^*(\mathbb{C}_p^\circ) \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$ d'évaluation en t , induit un unique morphisme $\psi_{\ell,s,t}$ de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ dans \mathbb{C}_p^\times . De plus, si $\text{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) \notin p\mathbb{Z}_p$, alors :*

1. *pour tout caractère additif $\psi : \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$, il existe un unique $\mathbf{a} \in \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ tel qu'on ait $\psi(\mathbf{y}) = \psi_{\ell,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{y})$ pour tout vecteur $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$;*
2. *l'image de $\psi_{\ell,s,t}$ est exactement le groupe μ_{p^ℓ} des racines de l'unité d'ordre divisant p^ℓ .*

Démonstration : La restriction de l'application $\text{eval}_t \circ \bar{\theta}_{\ell-1,s}$ à l'anneau $\mathbf{W}_\ell(\mathcal{O}[\mu_{q-1}])$ est un morphisme de groupes. D'après le lemme 3.3, le noyau de ce morphisme contient l'idéal $\mathbf{W}_\ell(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]})$. On en déduit par passage au quotient un morphisme du groupe $\mathbf{W}_\ell(\mathcal{O}[\mu_{q-1}])/\mathbf{W}_\ell(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]})$ dans \mathbb{C}_p^\times . Or l'extension K/\mathbb{Q}_p étant

totalelement ramifiée, il en est de même de $K[\mu_{q-1}]/\mathbb{Q}_p[\mu_{q-1}]$. Donc le corps résiduel de $K[\mu_{q-1}]$ qui, par définition, est le quotient $\mathcal{O}[\mu_{q-1}]/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]}$, est le même que le corps résiduel de $\mathbb{Q}_p[\mu_{q-1}]$, ce qui permet de prolonger le morphisme de réduction de $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ à \mathbb{F}_q en un unique morphisme $\mathcal{O}[\mu_{q-1}] \rightarrow \mathbb{F}_q$. Il en résulte que le groupe $\mathbf{W}_\ell(\mathcal{O}[\mu_{q-1}])/\mathbf{W}_\ell(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}[\mu_{q-1}]})$ est isomorphe à $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$, ce qui prouve l'existence et l'unicité du morphisme $\psi_{\ell,s,t}$.

1. On a montré la surjectivité du morphisme du groupe $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ dans son groupe dual, qui, à un vecteur \mathbf{a} , associe le caractère de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ qui envoie tout vecteur \mathbf{y} sur $\psi_{\ell,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{y})$. Or, comme $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ et son dual sont deux groupes finis de même ordre, il suffit de prouver que cette même application est injective, c'est-à-dire que son noyau se réduit à $\mathbf{0}$.

Par contraposition, il s'agit de montrer que, pour tout vecteur $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$, il existe un vecteur $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$, tel que l'image $\psi_{\ell,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{y})$ est non triviale.

On utilise le fait [5, proposition 8, p. AC IX.16] que l'anneau $\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $V(\mathbf{1})$. Par conséquent, il existe un entier $n < \ell$ tel que l'idéal non nul $\mathbf{a}\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ de l'anneau $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q) \simeq \mathbf{W}(\mathbb{F}_q)/V^\ell\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$ soit engendré par la classe $V^n(\mathbf{1}) + V^\ell\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$. Il existe donc un vecteur \mathbf{y} de longueur ℓ tel que $\mathbf{a}\mathbf{y} = V^n(\mathbf{1}) + V^\ell\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$.

Par définition du morphisme $\psi_{\ell,s,t}$, puis en utilisant le lemme 2.22, on a alors

$$\psi_{\ell,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{y}) = \theta_{\ell-1,s}(V^n\mathbf{1})(t) = \theta_{\ell-n-1,s}(\mathbf{1})(t^{p^n}).$$

Or, d'après la proposition 3.8, on sait que

$$\theta_{\ell-n-1}(\mathbf{1})(t^{p^n}) \equiv 1 + \pi_{\ell-n-1} \left(\sum_{j=0}^{s-1} t^{p^{n+j}} \right) \pmod{\pi_{\ell-n-1}^2 \mathbb{C}_p^\circ},$$

donc $\theta_{\ell-n-1}(\mathbf{1})(t^{p^n}) \neq 1$, dès que $\sum_{j=0}^{s-1} t^{p^{n+j}}$ n'est pas un élément de $\pi_{\ell-n-1} \mathbb{C}_p^\circ$. Or, l'extension $\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p$ est galoisienne, non ramifiée, et son groupe de Galois est isomorphe au groupe de Galois de l'extension résiduelle, l'isomorphisme étant défini en associant à tout automorphisme σ de $\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})$ l'automorphisme $\tilde{x} \mapsto \widetilde{\sigma(x)}$ du

corps résiduel [12, proposition 2.11, p. 27]. Par conséquent, le groupe de Galois de l'extension $\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p$ est cyclique, d'ordre s , engendré par la restriction à $\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})$ du Frobenius absolu φ . On en déduit, en utilisant le lemme 2.10, que

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \varphi^j(t) = \sum_{j=0}^{s-1} t^{p^j}.$$

Comme $t^{p^s} = t$, la valeur de t^{p^j} ne dépend que de la classe de l'entier j modulo s , et donc $\sum_{j=0}^{s-1} t^{p^{n+j}} = \sum_{j=0}^{s-1} t^{p^j} = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t)$.

On conclut que $\psi_{\ell,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{y}) = \theta_{\ell-n-1}(\mathbf{1})(t^{p^n}) \neq 1$ si $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t)$ n'est pas élément de $\pi_{n-\ell-1}\mathbb{C}_p^\circ$, ce qui revient à dire que $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) \notin p\mathbb{Z}_p$.

2. On sait que le groupe abélien fini $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ est isomorphe à son dual. Or, dans le groupe $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$, identifié au quotient $\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)/V^\ell\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$, l'élément $\mathbf{1} + V^\ell\mathbf{W}(\mathbb{F}_q)$ est d'ordre exactement p^ℓ , il existe donc un caractère $\psi : \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q) \rightarrow \mathbb{C}_p^\times$ qui est exactement d'ordre p^ℓ , ce qui nécessite que $\psi(\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q))$ est le groupe μ_{p^ℓ} tout entier. Ainsi il existe $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ tel que $\psi(\mathbf{y})$ est une racine primitive d'ordre p^ℓ de l'unité. D'après le point 1. qui vient d'être démontré, il existe un vecteur \mathbf{a} de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ tel que $\psi(\mathbf{z}) = \psi_{\ell,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{z})$ pour tout vecteur \mathbf{z} de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$. Par conséquent le groupe μ_{p^ℓ} est contenu dans l'image de $\psi_{\ell,s,t}$. Comme tout élément de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ est d'ordre divisant p^ℓ , l'inclusion réciproque est immédiate. \square

Remarque 3.10. Dans le cas où $s = 1$, A. Pulita [15, Theorem 2.7, p. 521] a voulu caractériser l'image de $\mathbf{1} + V^\ell\mathbf{W}(\mathbb{F}_p)$ par le morphisme $\psi_{\ell,1,t}$, où t satisfait la relation $t^p = t$, à l'aide de l'unique racine $\xi_{\ell-1}$ primitive d'ordre p^ℓ de l'unité telle que $|t\pi_{\ell-1} - (\xi_{\ell-1} - 1)| < |\pi_{\ell-1}|$. Malheureusement, cette racine $\xi_{\ell-1}$ n'est pas unique, sauf dans le cas $\ell = 1$ déjà traité par Dwork [10]. Montrons en effet que le nombre d'éléments de l'ensemble $E_{t,\ell}$ des racines de l'unité ξ d'ordre divisant p^ℓ qui vérifient $|(1+t\pi_{\ell-1}) - \xi| < |\pi_{\ell-1}|$ est égal à $p^{\ell-1}$, donc n'est égal à 1 que pour $\ell = 1$. On se base sur la propriété que, si $\zeta \in \mathbb{C}_p$ est une racine primitive de l'unité d'ordre p^r , où $r \geq 1$ est un entier naturel, alors $|\zeta - 1| = |\pi_{r-1}|$. On en déduit que, si ζ et ζ' sont deux éléments de $E_{t,\ell}$, alors ζ'/ζ est d'ordre divisant $p^{\ell-1}$. Donc on a au plus $p^{\ell-1}$ éléments dans $E_{t,\ell}$.

D'autre part, le corps résiduel de $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\ell})$ étant isomorphe à \mathbb{F}_p , on sait que, pour tout élément $\zeta \in \mu_{p^\ell}$, il existe un élément $t \in \mathbb{Z}_p$ tel que $t^p = \zeta$ et $\left| \frac{\zeta-1}{p} - t \right| < 1$, c'est-à-dire $|(1+t\pi_{\ell-1}) - \zeta| < |\pi_{\ell-1}|$. Par conséquent l'ensemble μ_{p^ℓ} de cardinal p^ℓ est réunion des p parties $E_{t,\ell}$ ayant chacune au plus $p^{\ell-1}$ éléments, donc chacune de ces parties doit avoir exactement $p^{\ell-1}$ éléments.

3.4 Formule de transitivité

Nous allons maintenant énoncer et démontrer une relation entre les caractères additifs $\psi_{\ell,sr,t}$ de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})$ et les caractères $\psi_{\ell,s,t}$ de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$. Pour ce faire, nous aurons à utiliser l'application trace

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)} : \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r}) \rightarrow \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$$

définie comme suit. On note $\tilde{\varphi}_r$ l'automorphisme de Frobenius qui à tout élément y de \mathbb{F}_{q^r} associe y^p ; alors on pose

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r}) \quad \mathrm{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbf{W}_\ell(\tilde{\varphi}_r^{is})(\mathbf{y}) . \quad (19)$$

Remarque 3.11. L'automorphisme $\tilde{\varphi}_r$ est induit sur le corps \mathbb{F}_{q^r} par l'automorphisme du corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ que nous avons noté $\tilde{\varphi}$ dans la démonstration du lemme 2.17. Ceci explique la présence de l'indice r dans la notation.

Nous aurons également besoin de l'application *relèvement* Te de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})$ dans $\mathbf{W}(\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}])$ associant au vecteur de Witt $\mathbf{y} = (y_j)_{0 \leq j < \ell}$ de longueur ℓ sur \mathbb{F}_{q^r} le vecteur de Witt de longueur infinie sur $\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}]$ défini par

$$\mathrm{Te}(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{\ell-1} V^j(\tau(\mathrm{Teich}(y_j))) . \quad (20)$$

Ainsi $\mathrm{Te}(\mathbf{y})$ n'est autre que le vecteur de Witt dont les ℓ premières composantes sont les images par le caractère de Teichmüller des composantes du vecteur \mathbf{y} , les autres composantes étant nulles.

Lemme 3.12. *Si \mathbf{y} et \mathbf{z} sont deux vecteurs de Witt de longueur ℓ sur \mathbb{F}_{q^r} , alors on a la congruence*

$$\mathrm{Te}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \equiv \mathrm{Te}(\mathbf{y}) + \mathrm{Te}(\mathbf{z}) \pmod{\mathbf{W}(p\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}]) + V^\ell \mathbf{W}(\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}])}.$$

Démonstration : Soit $\rho : \mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}] \rightarrow \mathbb{F}_{q^r}$ un morphisme de réduction. Puisque l'extension $\mathbb{Q}_p(\mu_{q^r-1})/\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée, le noyau du morphisme ρ est $p\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}]$. En vertu de la proposition 1.24, la congruence à montrer est équivalente à l'identité

$$\mathbf{W}_\ell(\rho)(\mathrm{Te}(\mathbf{y} + \mathbf{z})) = \mathbf{W}_\ell(\rho)(\mathrm{Te}(\mathbf{y}) + \mathrm{Te}(\mathbf{z})) .$$

Or il est facile de voir, en utilisant la définition du caractère de Teichmüller, que $\mathbf{W}_\ell(\rho) \circ \mathrm{Te}$ est l'application identique de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})$. Par conséquent $\mathbf{W}_\ell(\rho)(\mathrm{Te}(\mathbf{y} + \mathbf{z})) = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. Et, puisque $\mathbf{W}_\ell(\rho)$ est un morphisme d'anneaux, on a aussi $\mathbf{W}_\ell(\rho)(\mathrm{Te}(\mathbf{y}) + \mathrm{Te}(\mathbf{z})) = \mathbf{W}_\ell(\rho)(\mathrm{Te}(\mathbf{y})) + \mathbf{W}_\ell(\rho)(\mathrm{Te}(\mathbf{z})) = \mathbf{y} + \mathbf{z}$. \square

Proposition 3.13. *Soit $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$. On a la formule de transitivité*

$$\psi_{\ell, sr, t} = \psi_{\ell, s, t} \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)} .$$

Démonstration : Soit un vecteur de Witt $\mathbf{y} = (y_j)_{0 \leq j < \ell}$ de longueur ℓ sur \mathbb{F}_{q^r} . Par définition,

$$\psi_{\ell, sr, t}(\mathbf{y}) = \theta_{\ell-1, sr}(\mathrm{Te}(\mathbf{y}))(t) .$$

D'après le lemme 2.24, on en déduit que

$$\psi_{\ell, sr, t}(\mathbf{y}) = \prod_{i=0}^{r-1} \theta_{\ell-1, s}(\mathrm{Te}(\mathbf{y})^{\varphi^{is}})(t^{p^{si}}) .$$

Or on sait que $t^q = t^{p^s} = t$; par conséquent :

$$\psi_{\ell, sr, t}(\mathbf{y}) = \prod_{i=0}^{r-1} \theta_{\ell-1, s}(\mathrm{Te}(\mathbf{y})^{\varphi^{is}})(t) .$$

On utilise alors l'identité

$$\mathrm{Te}(\mathbf{y})^\varphi = \mathrm{Te}(\mathbf{W}_\ell(\tilde{\varphi}_r)(\mathbf{y}))$$

qui se déduit du lemme 2.10. Donc

$$\psi_{\ell, sr, t}(\mathbf{y}) = \prod_{i=0}^{r-1} \theta_{\ell-1, s}(\text{Te}(\mathbf{W}_\ell(\tilde{\varphi}_r^{is})(\mathbf{y}))(t)) .$$

Puisque $\theta_{\ell-1, s}$ est un morphisme, on en déduit

$$\psi_{\ell, sr, t}(\mathbf{y}) = \theta_{\ell-1, s} \left(\sum_{i=0}^{r-1} \text{Te}(\mathbf{W}_\ell(\tilde{\varphi}_r^{is})(\mathbf{y}))(t) \right) .$$

Or par l'équation (19) et par le lemme 3.12, il existe un vecteur \mathbf{u} élément de l'idéal $\mathbf{W}(p\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}]) + V^\ell \mathbf{W}(\mathbb{Z}_p[\mu_{q^r-1}])$ tel que

$$\sum_{i=0}^{r-1} \text{Te}(\mathbf{W}_\ell(\tilde{\varphi}_r^{is})(\mathbf{y})) = \text{Te}(\text{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{y})) + \mathbf{u} .$$

Comme la valeur de la série $\theta_{\ell-1, s}(\mathbf{u})$ en t est égale à 1 en vertu des lemmes 2.26 et 3.3, on en déduit

$$\psi_{\ell, sr, t}(\mathbf{y}) = \theta_{\ell-1, s}(\text{Te}(\text{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{y}))(t)) ,$$

équation où on reconnaît dans le membre de droite $\psi_{\ell, s, t}(\text{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{y}))$. \square

3.5 Fonctions scindantes

On va maintenant chercher à exprimer analytiquement le caractère additif $\psi_{\ell, s, t}$ du groupe $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ qui a été défini par la proposition 3.9. Remarquons que, par définition de $\psi_{\ell, s, t}$, on doit avoir $t^q = t$.

Soit un vecteur de Witt $\mathbf{y} = (y_j)_{0 \leq j < \ell}$ de longueur ℓ sur \mathbb{F}_q . On a vu précédemment comment lui associer son relèvement $\text{Te}(\mathbf{y})$, vecteur de Witt de longueur infinie sur $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$, défini par

$$\text{Te}(\mathbf{y}) = \sum_{j=0}^{\ell-1} V^j(\tau(\text{Teich}(y_j))) .$$

Par définition du caractère $\psi_{\ell, s, t}$, on a

$$\psi_{\ell, s, t}(\mathbf{y}) = \theta_{\ell-1, s}(\text{Te}(\mathbf{y}))(t) .$$

Or les lemmes 2.22 et 2.23 conduisent à l'égalité

$$\theta_{\ell-1,s}(\text{Te}(\mathbf{y})) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1,s}(\mathbf{1}) \circ (\text{Teich}(y_j)x^{p^j}) .$$

Par conséquent

$$\psi_{\ell,s,t}(\mathbf{y}) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1,s}(\mathbf{1})(t^{p^j} \text{Teich}(y_j)) . \quad (21)$$

Introduisons la "fonction" $\Omega_{\ell,s,t}$ qui est la série entière en ℓ indéterminées $x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}$ à coefficients dans l'anneau $\mathcal{O}[\mu_{q-1}]$ définie par

$$\Omega_{\ell,s,t}(x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1,s}(\mathbf{1})(t^{p^j} x_j) \quad (22)$$

Avec cette notation $\Omega_{\ell,s,t}$, la formule (21) s'écrit comme suit.

Proposition 3.14. *Soit $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$. Alors, pour tout vecteur $\mathbf{y} = (y_i)_{0 \leq i < \ell}$ de longueur ℓ sur \mathbb{F}_q , on a*

$$\psi_{\ell,s,t}(\mathbf{y}) = \Omega_{\ell,s,t}(\text{Teich}(y_0), \dots, \text{Teich}(y_{\ell-1})) .$$

Proposition 3.15. *Soit $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$. Si $r \geq 1$ est un entier naturel, alors on a l'identité*

$$\Omega_{\ell,sr,t}(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{i=0}^{r-1} \Omega_{\ell,s,t}(x_0^{q^i}, \dots, x_{\ell-1}^{q^i}) .$$

Démonstration : On a par l'équation (22)

$$\Omega_{\ell,sr,t}(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1,sr}(\mathbf{1})(t^{p^j} x_j) .$$

D'après le lemme 2.24

$$\Omega_{\ell,sr,t}(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{j=0}^{\ell-1} \prod_{i=0}^{r-1} \left(\theta_{\ell-j-1,s}(\mathbf{1}) \circ x^{p^{si}} \right) (t^{p^j} x_j) ;$$

donc on obtient

$$\Omega_{\ell, sr, t}(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1, s}(\mathbf{1}) ((t^{p^j})x_j)^{p^{si}},$$

et par la suite, on a

$$\Omega_{\ell, sr, t}(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1, s}(\mathbf{1}) ((t^{p^j})^{p^{si}}(x_j)^{p^{si}}),$$

d'où

$$\Omega_{\ell, sr, t}(x_0, \dots, x_{\ell-1}) = \prod_{i=0}^{r-1} \prod_{j=0}^{\ell-1} \theta_{\ell-j-1, s}(\mathbf{1}) (t^{p^j} x_j^{q^i}),$$

ce qui donne le résultat cherché en utilisant l'équation (22) exprimant la série $\Omega_{\ell, s, t}$.

□

Nous rappelons la définition des fonctions scindantes donnée par [4] en l'étendant du corps premier \mathbb{F}_p au corps fini \mathbb{F}_q .

Définition 3.2. Soit $\ell \geq 1$ un entier naturel, et $q = p^s$ une puissance de p . Une *fonction s-scindante de niveau ℓ* , est une série entière formelle $\Omega(x_1, \dots, x_\ell)$, à coefficients dans \mathcal{O} , en les ℓ indéterminées x_1, \dots, x_ℓ , qui converge sur un polydisque de la forme $D(0, r_1) \times \dots \times D(0, r_\ell)$, dont les rayons r_1, \dots, r_ℓ sont tous supérieurs à 1, et vérifiant de plus les deux conditions suivantes.

1. La fonction ψ de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ dans \mathbb{C}_p qui au vecteur de Witt $\mathbf{y} = (y_j)_{0 \leq j < \ell}$ associe $\Omega(\text{Teich}(y_0), \text{Teich}(y_1), \dots, \text{Teich}(y_{\ell-1}))$ est un caractère additif d'ordre p^ℓ de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)$ dans \mathbb{C}_p^* .

2. Pour chaque entier $r \geq 1$, le caractère additif de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})$ obtenu en composant ψ avec l'application trace $\text{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)}$ s'exprime sous la forme

$$\psi \left(\text{Tr}_{\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})/\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)}(\mathbf{y}) \right) = \prod_{i=0}^{r-1} \Omega \left(\text{Teich}(y_0)^{q^i}, \dots, \text{Teich}(y_{\ell-1})^{q^i} \right) \quad (23)$$

pour tout vecteur de Witt $\mathbf{y} = (y_j)_{0 \leq j < \ell} \in \mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_{q^r})$.

Théorème 3.16. *Soit $\ell \geq 1, s \geq 1$ deux entiers naturels, et notons $q = p^s$. Soit $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$ et $\text{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) \notin p\mathbb{Z}_p$. Alors la série $\Omega_{\ell,s,t}$ est une fonction s -scindante de niveau ℓ .*

Démonstration : Il est évident que la série $\Omega_{\ell,s,t}(x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1})$, introduite par l'équation (22) comme étant le produit des séries $\theta_{\ell-j-1,s}(\mathbf{1})(t^{p^j}x_j)$, est à coefficients dans l'anneau \mathcal{O} , puisque chaque facteur du produit est à coefficients dans \mathcal{O} . Puisqu'on sait par la proposition 2.25 que chacune de ces séries $\theta_{\ell-j-1,s}(\mathbf{1})$ a un rayon de convergence strictement supérieur à 1, il en est de même des mêmes séries appliquées à $t^{p^j}x_j$, puisque t^{p^j} est de module 1. Par conséquent la série $\Omega_{\ell,s,t}(x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1})$ est convergente dans un produit de disques de rayons strictement supérieurs à 1. D'autre part, d'après les propositions 3.9 et 3.14, la série $\Omega_{\ell,s,t}$ vérifie la condition 1, et, par le biais des propositions 3.13, 3.14 et 3.15, la même série $\Omega_{\ell,s,t}$ vérifie la condition 2 de la définition 3.2 ; ce qui achève la démonstration. \square

3.6 Expression analytique d'un caractère multiplicatif de $W_2(\mathbb{F}_q)$

Dans le cas $\ell = 1$, on a vu que le groupe des caractères du groupe \mathbb{F}_q^* était le groupe cyclique engendré par le caractère Teich de Teichmüller. Pour simplifier, on va limiter ici l'étude des caractères multiplicatifs au cas $\ell = 2$. On note $W_2(\mathbb{F}_q)^*$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau des vecteurs de Witt sur \mathbb{F}_q de longueur 2. Un vecteur de Witt $\mathbf{z} = (z_0, z_1)$ est élément de $\mathbf{W}_\ell(\mathbb{F}_q)^*$, si et seulement si $z_0 \neq 0$. Soit $(z_0, z_1) \in W_2(\mathbb{F}_q)^*$. Exprimons le vecteur \mathbf{z} sous la forme $(z_0, z_1) = (z_0, 0)(1, y)$, autrement dit y vérifie l'identité $(z_0, z_1) = (z_0, z_0^p y)$, i.e. $y = \frac{z_1}{z_0^p} = z_1 z_0^{p(q-2)}$. Pour tout caractère multiplicatif χ , on a alors

$$\chi(\mathbf{z}) = \chi(z_0, 0)\chi(1, y) ;$$

or $z_0 \mapsto \chi(z_0, 0)$ est un caractère multiplicatif de \mathbb{F}_q comme composé des morphismes multiplicatifs χ et $z_0 \mapsto (z_0, 0)$; par conséquent, il existe un entier $m \in [0 \dots q-2]$ tel qu'on ait

$$\forall z_0 \in \mathbb{F}_q, \quad \chi(z_0, 0) = \text{Teich}(z_0)^m.$$

Par ailleurs, $y \mapsto \chi(1, y)$ est un caractère additif de \mathbb{F}_q car le produit dans $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$ des vecteurs $(1, y)$ et $(1, y')$ est égal à $(1, y + y')$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$ et $\text{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) \notin p\mathbb{Z}_p$, il existe un élément $b \in \mathbb{F}_q$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{F}_q, \quad \chi(1, y) = \psi_{1,s,t}(by) = \Omega_{1,s,t}(\text{Teich}(b)\text{Teich}(y)) .$$

Proposition 3.17. *Soit $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$ et $\text{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) \notin p\mathbb{Z}_p$, et χ un caractère multiplicatif de $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$. Alors il existe un entier $m \in [0..q-2]$, et un élément b de \mathbb{F}_q tel que*

$$\forall \mathbf{z} = (z_0, z_1) \in \mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star, \quad \chi(\mathbf{z}) = \text{Teich}(z_0)^m \Omega_{1,s,t}(\text{Teich}(b)\text{Teich}(z_1)\text{Teich}(z_0)^{p(q-2)}) .$$

4 La formule de trace

Généralisons la formule de trace obtenue par Dwork [9] pour exprimer les sommes de Gauss classiques, au cas de sommes définies sur des anneaux de vecteurs de Witt de longueur finie sur un corps fini \mathbb{F}_q , où $q = p^s$ est une puissance du nombre premier p . Commençons par traiter le cas particulier des vecteurs de longueur $\ell = 2$.

4.1 Expression analytique de la somme de Gauss

Définition 4.1. Soit ψ un caractère additif, et χ un caractère multiplicatif, de $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$. On leur associe la *somme de Gauss*

$$g(\psi, \chi) = - \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star} \psi(\mathbf{y}) \chi(\mathbf{y}) .$$

Grâce à la proposition 3.9, et si $t \in \mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ vérifie $t^{p^s} = t$ et $\text{Tr}_{\mathbb{Q}_p(\mu_{q-1})/\mathbb{Q}_p}(t) \notin p\mathbb{Z}_p$, il existe un vecteur de Witt \mathbf{a} de longueur 2 sur \mathbb{F}_q tel que ψ s'écrive comme composée du caractère $\psi_{2,s,t}$ avec l'homothétie de rapport \mathbf{a} de l'anneau $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$, de sorte que la somme de Gauss s'exprime comme suit

$$g(\psi, \chi) = - \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star} \psi(\mathbf{y}) \chi(\mathbf{y}) = - \sum_{\mathbf{y} \in \mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star} \psi_{2,s,t}(\mathbf{a}\mathbf{y}) \chi(\mathbf{y}) .$$

On se restreint au cas où le caractère additif ψ est d'ordre exactement p^2 . Dans ce cas $\mathbf{a} \in \mathbb{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star$, et on peut réécrire la somme de Gauss comme suit :

$$g(\psi, \chi) = - \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star} \psi_{2,s,t}(\mathbf{z}) \chi(\mathbf{a}^{-1} \mathbf{z}) \quad ,$$

ce qui est équivalent à dire que

$$g(\psi, \chi) = -\chi(\mathbf{a}^{-1}) \sum_{\mathbf{z} \in \mathbb{W}_2(\mathbb{F}_q)^\star} \psi_{2,s,t}(\mathbf{z}) \chi(\mathbf{z}) = \chi(\mathbf{a}^{-1}) g(\psi_{2,s,t}, \chi) \quad .$$

Ainsi, à condition que le caractère additif ψ soit d'ordre maximal, l'étude de la somme de caractères $g(\psi, \chi)$ se ramène à celle de $g(\psi_{2,s,t}, \chi)$. Donnons maintenant une expression analytique de la somme de caractères $g(\psi_{2,s,t}, \chi)$. En écrivant $\mathbf{z} = (z_0, z_1)$, on a :

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = - \sum_{z_0 \in \mathbb{F}_q^\star} \sum_{z_1 \in \mathbb{F}_q} \psi_{2,s,t}(z_0, z_1) \chi(z_0, z_1) \quad . \quad (24)$$

D'après la proposition 3.17, il existe un entier naturel $m \in [0..q-2]$ et un élément $b \in \mathbb{F}_q$ tels que, pour tout $(z_0, y) \in \mathbb{F}_q^\star \times \mathbb{F}_q$, on ait

$$\chi(z_0, z_1) = \text{Teich}(z_0)^m \Omega_{1,s,t}(\text{Teich}(b) \text{Teich}(z_1) \text{Teich}(z_0)^{p(q-2)}) \quad .$$

D'autre part, par la proposition 3.14, on sait que $\psi_{2,s,t}(z_0, z_1)$ se met sous la forme $\Omega_{2,s,t}(\text{Teich}(z_0), \text{Teich}(z_1))$. Substituant ces expressions dans (24), on obtient, en posant

$$\hat{H}(x_0, x_1) = -\Omega_{2,s,t}(x_0, x_1) x_0^m \Omega_{1,s,t}(\text{Teich}(b) x_1 x_0^{p(q-2)}), \quad (25)$$

l'expression de la somme de Gauss sous la forme

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = \sum_{z_0 \in \mathbb{F}_q^\star} \sum_{z_1 \in \mathbb{F}_q} \hat{H}(\text{Teich}(z_0), \text{Teich}(z_1)). \quad (26)$$

4.2 L'espace des fonctions analytiques sur un polydisque fermé

Pour $\beta > 0$ un nombre réel, notons E_β l'espace vectoriel sur le corps $K_1[\mu_{q-1}]$ dont les éléments sont les séries entières à deux variables

$$G(x_0, x_1) = \sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1} \quad (27)$$

à coefficients dans $K_1[\mu_{q-1}]$, telles que la famille $(|a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1})_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2}$ tende vers zéro selon le filtre des complémentaires de parties finies de \mathbb{N}^2 . Pour une série $G(x_0, x_1)$ élément de E_β écrite sous la forme (27), on pose

$$\|G\|_\beta = \sup\{|a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1}, (n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2\},$$

ce qui fait de E_β un espace vectoriel normé.

On peut interpréter l'espace E_β comme la somme directe de Banach [16, p. 184] de la famille d'espaces de Banach $(e_{n_0, n_1}(\beta))_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2}$ définis comme suit : $e_{n_0, n_1}(\beta)$ est l'espace vectoriel de dimension un $K_1[\mu_{q-1}]$ normé en posant

$$\forall a \in K_1[\mu_{q-1}], \quad \|a\|_{n_0, n_1, \beta} = |a| \beta^{n_0+n_1}.$$

Ceci entraîne que, pour tout réel $\beta > 0$, l'espace vectoriel normé E_β est un espace de Banach [16, Theorem p. 184].

Il est immédiat que, si $0 < \beta < \beta'$, alors $E_{\beta'}$ est un sous-espace de E_β .

Définition 4.2. Soient E et F deux espaces de Banach, et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On dit que f est complètement continue si elle est la limite d'une suite d'applications linéaires continues de rang fini

Proposition 4.1. Soit β et β' deux nombres réels tels que $0 < \beta < \beta'$. L'application injection canonique (ou insertion) $i_{\beta', \beta} : E_{\beta'} \rightarrow E_\beta$ est complètement continue et son image est dense.

Démonstration : Pour un élément $G = \sum_{(n_0, n_1)} a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ de E_β et pour un entier naturel d , notons G_d le polynôme

$$G_d = \sum_{n_0+n_1 \leq d} a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}.$$

Pour tout $G = \sum a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ élément de E_β , on a

$$\|G - G_d\|_\beta = \sup_{n_0+n_1 > d} |a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1}. \quad (28)$$

Puisque G appartient à E_β , on en déduit que la norme $\|G - G_d\|_\beta$ converge vers zéro. Puisque les G_d sont des polynômes, donc des éléments de $E_{\beta'}$, ceci suffit à montrer que l'image de $i_{\beta',\beta}$ est dense dans E_β .

Pour $d \in \mathbb{N}$, considérons l'application $i_d : E_{\beta'} \rightarrow E_\beta$ qui à toute série G associe la série tronquée $i_d(G) = G_d$. L'image de i_d étant contenue dans le sous-espace engendré par les monômes de degré total $\leq d$, sous-espace qui est de dimension finie, on voit que l'application linéaire i_d est de rang fini pour tout $d \in \mathbb{N}$. De plus, on a pour tout $G = \sum a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ élément de $E_{\beta'}$,

$$\|G_d\|_\beta = \sup_{n_0+n_1 \leq d} |a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1} \leq \sup_{n_0+n_1 \leq d} |a_{n_0, n_1}| \beta'^{n_0+n_1} \leq \sup_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} |a_{n_0, n_1}| \beta'^{n_0+n_1} = \|G\|_{\beta'},$$

ce qui prouve que l'application linéaire i_d est continue de $E_{\beta'}$ dans E_β . De plus, l'équation (28) entraîne la suite de relations

$$\|G - G_d\|_\beta \leq \|G\|_{\beta'} \sup_{n_0+n_1 > d} \beta'^{-n_0-n_1} \beta^{n_0+n_1} = \|G\|_{\beta'} \left(\frac{\beta}{\beta'} \right)^{d+1},$$

ce qui prouve que $\|i_{\beta',\beta} - i_d\| \leq \left(\frac{\beta}{\beta'} \right)^{d+1}$, et donc, puisque $\frac{\beta}{\beta'} < 1$, que $\lim_{d \rightarrow +\infty} i_d = i_{\beta',\beta}$, c'est-à-dire que $i_{\beta',\beta}$ est complètement continue. \square

4.3 Opérateur de Dwork

Rappelons que q désigne l'entier p^s .

Notation 4.3. Si $G = \sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ est une série entière en deux variables à coefficients dans \mathbb{C}_p , on note $\text{Dw}_q(G)$ la série $\sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} a_{qn_0, qn_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$.

Lemme 4.2. Soit $\beta > 0$ un nombre réel. Si la série entière G est élément de l'espace de Banach E_β , alors la série $\text{Dw}_q(G)$ est élément de E_{β^q} . De plus, on a l'inégalité

$$\|\text{Dw}_q(G)\|_{\beta^q} \leq \|G\|_\beta.$$

Démonstration : Soit $G(x_0, x_1) = \sum a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ une série de E_β . Comme l'application de l'ensemble \mathbb{N}^2 dans lui-même envoyant (n_0, n_1) sur (qn_0, qn_1) est injective, l'image réciproque par cette application du complémentaire d'une partie finie est

complémentaire d'une partie finie. Par conséquent, la famille $(|a_{qn_0, qn_1}| \beta^{q(n_0+n_1)})_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2}$, obtenue par composition avec cette application de la famille $(|a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1})_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2}$ qui tend vers zéro, est elle aussi une famille tendant vers zéro. Ceci montre que la série $\text{Dw}_q(G)$ est élément de E_{β^q} . De plus, l'ensemble des nombres réels de la forme $|a_{qn_0, qn_1}| \beta^{q(n_0+n_1)}$ étant une partie de l'ensemble des nombres réels de la forme $|a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1}$, est majoré par la borne supérieure de ce deuxième ensemble, notée $\|G\|_\beta$. Ceci montre que la norme dans E_{β^q} de $\text{Dw}_q(G)$ est majorée par $\|G\|_\beta$. \square

Définition 4.4. Soit $\beta > 0$ un nombre réel. On appelle opérateur de Dwork l'application Dw_q de E_β dans E_{β^q} .

Proposition 4.3. L'opérateur de Dwork $\text{Dw}_q : E_\beta \rightarrow E_{\beta^q}$ est continu pour tout $\beta > 0$.

Démonstration : Par le lemme 4.2, on sait que Dw_q est une application lipschitzienne, elle est donc continue. \square

4.4 Opérateurs de multiplication

L'ensemble des séries entières formelles en deux variables à coefficients dans \mathbb{C}_p est muni du produit de Cauchy.

Proposition 4.4. Soient $G = \sum a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ et $H = \sum b_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ deux séries appartenant à l'espace E_β . Alors leur produit de Cauchy GH est élément de E_β , et on a

$$\|GH\|_\beta \leq \|G\|_\beta \|H\|_\beta \quad (29)$$

Démonstration : On sait que $GH = \sum c_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$, avec, pour tout $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$:

$$c_{n_0, n_1} = \sum_{k_0=0}^{n_0} \sum_{k_1=0}^{n_1} a_{k_0, k_1} b_{n_0-k_0, n_1-k_1} . \quad (30)$$

Il n'y rien à montrer si $G = H = 0$. Supposons donc qu'au moins l'une des deux séries G et H est non nulle, c'est-à-dire que $\max(\|G\|_\beta, \|H\|_\beta) > 0$. Pour montrer que le produit

GH est élément de E_β , on choisit un réel arbitraire $\epsilon > 0$ pour justifier l'existence d'une partie finie $C(\epsilon)$ de \mathbb{N}^2 telle que $|c_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1} < \epsilon$ pour tout $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2 \setminus C(\epsilon)$.

Puisque G appartient à E_β , il existe une partie finie $A(\epsilon)$ de \mathbb{N}^2 telle qu'on ait l'implication

$$|a_{k_0, k_1}| \beta^{k_0+k_1} \geq \frac{\epsilon}{\max(\|G\|_\beta, \|H\|_\beta)} \Rightarrow (k_0, k_1) \in A(\epsilon). \quad (31)$$

De même, puisque H appartient à E_β , il existe une partie finie $B(\epsilon)$ de \mathbb{N}^2 telle qu'on ait l'implication

$$|b_{l_0, l_1}| \beta^{l_0+l_1} \geq \frac{\epsilon}{\max(\|G\|_\beta, \|H\|_\beta)} \Rightarrow (l_0, l_1) \in B(\epsilon). \quad (32)$$

Si $|c_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1} \geq \epsilon$, il résulte de la définition (30) du produit de Cauchy des deux séries G et H qu'il existe des éléments (k_0, k_1) et (l_0, l_1) de \mathbb{N}^2 tels que $n_0 = k_0 + l_0$, $n_1 = l_1 + k_1$ et $|a_{k_0, k_1}| \beta^{k_0+k_1} |b_{l_0, l_1}| \beta^{l_0+l_1} \geq \epsilon$. Par la définition des normes de G et de H , on en déduit qu'on doit alors avoir $|a_{k_0, k_1}| \beta^{k_0+k_1} \geq \frac{\epsilon}{\max(\|G\|_\beta, \|H\|_\beta)}$ et $|b_{l_0, l_1}| \beta^{l_0+l_1} \geq \frac{\epsilon}{\max(\|G\|_\beta, \|H\|_\beta)}$. En utilisant les implications (31) et (32), on en déduit que $(k_0, k_1) \in A(\epsilon)$ et $(l_0, l_1) \in B(\epsilon)$. Il suffit donc de prendre $C(\epsilon) = A(\epsilon) + B(\epsilon)$ pour trouver une partie finie de \mathbb{N}^2 satisfaisant la propriété désirée. Par conséquent GH est élément de E_β , et

$$\|GH\|_\beta = \sup_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} |c_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1} \leq \|G\|_\beta \|H\|_\beta.$$

□

Proposition 4.5. *Pour un nombre réel $\beta > 0$, soit $H = \sum b_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ une série appartenant à l'espace E_β . L'opérateur multiplication $\text{mult}_H : E_\beta \rightarrow E_\beta$ qui envoie une série G sur GH est continu.*

Démonstration : D'après la proposition 4.4, l'application linéaire mult_H est bien définie de E_β dans lui-même, et lipschitzienne, donc continue. □

4.5 Opérateur alpha

On rappelle que $q = p^s$.

Définition 4.5. Soit $\beta > 1$ un nombre réel, et $H(x_0, x_1)$ une série appartenant à l'espace $E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$. On appelle *opérateur alpha* associé à H sur E_β l'application composée

$$\alpha = \text{Dw}_q \circ \text{mult}_H \circ i_{\beta, \beta^{\frac{1}{q}}} ,$$

où $\text{Dw}_q : E_{\beta^{\frac{1}{q}}} \rightarrow E_\beta$ est l'opérateur de Dwork, $\text{mult}_H : E_{\beta^{\frac{1}{q}}} \rightarrow E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$ est l'opérateur de multiplication par H , et $i_{\beta, \beta^{\frac{1}{q}}} : E_\beta \rightarrow E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$ est l'injection canonique.

Proposition 4.6. Soit un réel $\beta > 1$, et H un élément de $E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$; l'opérateur alpha associé à H sur E_β est un endomorphisme complètement continu de l'espace E_β .

Démonstration : Pour $d \in \mathbb{N}$, considérons l'application $i_d : E_\beta \rightarrow E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$ qui à toute série G associée à la série tronquée $i_d(G) = G_d = \sum_{n_0+n_1 \leq d} a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$. L'image de i_d étant contenue dans le sous-espace engendré par les monômes de degré total $\leq d$, sous-espace qui est de dimension finie, on voit que l'application linéaire i_d est de rang fini pour tout $d \in \mathbb{N}$. De plus, on a pour tout $G = \sum a_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ élément de E_β ,

$$\|G_d\|_{\beta^{\frac{1}{q}}} = \sup_{n_0+n_1 \leq d} |a_{n_0, n_1}| \beta^{\frac{1}{q}(n_0+n_1)} \leq \sup_{n_0+n_1 \leq d} |a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1} \leq \sup_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} |a_{n_0, n_1}| \beta^{n_0+n_1} = \|G\|_\beta ,$$

ce qui prouve que l'application linéaire i_d est continue de E_β dans $E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$.

$$\|G - G_d\|_{\beta^{\frac{1}{q}}} \leq \|G\|_\beta \sup_{n_0+n_1 > d} \beta^{-n_0-n_1} \beta^{\frac{1}{q}(n_0+n_1)} = \|G\|_\beta \left(\frac{\beta^{\frac{1}{q}}}{\beta} \right)^{d+1} ,$$

ce qui prouve que $\|i_{\beta, \beta^{\frac{1}{q}}} - i_d\| \leq \left(\frac{\beta^{\frac{1}{q}}}{\beta} \right)^{d+1}$, et donc, puisque $\frac{\beta^{\frac{1}{q}}}{\beta} < 1$, que $\lim_{d \rightarrow +\infty} i_d = i_{\beta, \beta^{\frac{1}{q}}}$, c'est-à-dire que $i_{\beta, \beta^{\frac{1}{q}}}$ est complètement continue.

Comme les applications $\text{Dw}_q : E_{\beta^{\frac{1}{q}}} \rightarrow E_\beta$, $\text{mult}_H : E_{\beta^{\frac{1}{q}}} \rightarrow E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$, sont continues d'après les propositions 4.3, 4.5, alors l'application composée $\alpha = \text{Dw}_q \circ \text{mult}_H \circ i_d$ est continue. \square

Proposition 4.7. La famille $(x_0^{n_0} x_1^{n_1})_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2}$ est une base de Schauder [6] orthogonale de l'espace E_β . La matrice dans cette base de l'opérateur α associé la série $H(x_0, x_1) =$

$\sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} b_{(m_0, m_1)} x_0^{m_0} x_1^{m_1} \in E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$ est donnée par

$$\alpha(x_0^{n_0} x_1^{n_1}) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2, qm_0 \geq n_0, qm_1 \geq n_1} b_{qm_0 - n_0, qm_1 - n_1} x_0^{m_0} x_1^{m_1} .$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \alpha(x_0^{n_0} x_1^{n_1}) &= \text{Dw}_q \circ \text{mult}_H \circ i_{\beta, \beta^{\frac{1}{q}}}(x_0^{n_0} x_1^{n_1}) = \\ \text{Dw}_q \circ \text{mult}_H(x_0^{n_0} x_1^{n_1}) &= \text{Dw}_q \left(\sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{(m_0, m_1)} x_0^{m_0} x_1^{m_1} (x_0^{n_0} x_1^{n_1}) \right) \\ &= \text{Dw}_q \left(\sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{m_0, m_1} x_0^{n_0 + m_0} x_1^{n_1 + m_1} \right) \\ &= \text{Dw}_q \left(\sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{m_0, m_1} x_0^{n_0 + m_0} x_1^{n_1 + m_1} \right) \\ &= \text{Dw}_q \left(\sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{m_0 - n_0, m_1 - n_1} x_0^{m_0} x_1^{m_1} \right) \\ &= \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2, qm_0 \geq n_0, qm_1 \geq n_1} b_{m_0 q - n_0, m_1 q - n_1} x_0^{m_0} x_1^{m_1} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. \square

Proposition 4.8. Soit un réel $\beta > 1$, et $H(x_0, x_1) = \sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} b_{n_0, n_1} x_0^{n_0} x_1^{n_1}$ un élément de $E_{\beta^{\frac{1}{q}}}$; l'opérateur alpha associé à H est un opérateur nucléaire de trace

$$\text{Tr}(\alpha) = \sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} b_{(q-1)n_0, (q-1)n_1} .$$

Démonstration : D'après la proposition 4.7 la trace de la matrice associée à l'opérateur alpha est la somme des éléments de la diagonale de cette matrice; autrement dit

$$\text{Tr}(\alpha) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{(q-1)n_0, (q-1)n_1} .$$

\square

4.6 Formule de traces

Proposition 4.9. *Soit $s \geq 1$ un entier naturel, $q = p^s$ et t un élément de $\mathbb{Z}_p[\mu_{q-1}]$ tel que $t^q = t$. Pour tout caractère multiplicatif χ de $\mathbf{W}_2(\mathbb{F}_q)$, il existe un réel $\beta_0 > 1$ tel que, pour tout $\beta \in]1, \beta_0[$, on a l'égalité*

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = (q-1)^2 \text{Tr}(\alpha) ,$$

où α est l'opérateur $\alpha : E_\beta \rightarrow E_\beta$ associé à la série \widehat{H} définie par (25).

Démonstration : posons

$$\widehat{H}(x_0, x_1) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{m_0, m_1} x_0^{m_0} x_1^{m_1} ,$$

D'après la proposition 4.8 la trace de la matrice associée à l'opérateur alpha associé à la série \widehat{H} est

$$\text{Tr}(\alpha) = \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{(q-1)m_0, (q-1)m_1} .$$

D'autre part, on a d'après l'identité 26

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = \sum_{z_0 \in \mathbb{F}_q^*} \sum_{z_1 \in \mathbb{F}_q} \widehat{H}(\text{Teich}(z_0), \text{Teich}(z_1)) ,$$

en posant $(x_0, x_1) = ((\text{Teich}(z_0), \text{Teich}(z_1)))$, d'où

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = \sum_{x_0 \in \mu_{q-1}} \sum_{x_1 \in \mu_{q-1}} \sum_{(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2} b_{m_0, m_1} x_0^{m_0} x_1^{m_1} ,$$

et en utilisant l'identité suivante:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{x_i \in \mu_{q-1}} x_i^{n_i} = \begin{cases} q-1 & \text{si } q-1 \mid n_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} ,$$

on trouve alors que

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = (q-1)^2 \sum_{(m_0, m_1) \in \mathbb{N}^2} b_{(q-1)n_0, (q-1)n_1} ,$$

i.e

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = (q-1)^2 \text{Tr}(\alpha)$$

□

Définition 4.6. L'espace des séries surconvergentes est l'espace $\mathcal{H}^\dagger = \cup_{\beta > 1} E_\beta$ muni de la topologie de limite inductive des espaces vectoriels normés E_β .

Proposition 4.10. *Sous les hypothèses précédentes, la limite inductive α^\dagger des opérateurs α associés sur E_β à la série \hat{H} définie par (25) est un opérateur nucléaire sur \mathcal{H}^\dagger , et on a*

$$g(\psi_{2,s,t}, \chi) = (q-1)^2 \text{Tr}(\alpha^\dagger) .$$

References

- [1] E. ARTIN : *Algebraic Numbers and Algebraic Functions*. Gordon and Breach, New York 1967.
- [2] D. BARSKY : *On Morita's p-adic gamma function*. Math. Proc. Camb. phil. Soc. **89**, **Fasc 1** (1981), 23–27.
- [3] B. BENZAGHOU : *Algèbres de Hadamard*. Soc. Math. France. **98** (1970), 209-252.
- [4] R. BLACHE : *Stickelberger theorem for p-adic Gauss sums*. Acta Arithmetica, vol. 118, no. 1, (2005), 11-26
- [5] N. BOURBAKI : *Eléments de Mathématique. Algèbre commutative. Chapitre IX. Anneaux locaux noethériens complets*. Springer, Berlin. (2006).
- [6] H. BRÉSIS : *Analyse fonctionnelle : thorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [7] G. CHRISTOL : *Modules différentiels et équations différentielles p-adiques*. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 66. Queen's University, Kingston, ON, 1983. vi+218 pp.

- [8] G. CHRISTOL : *Rayons des solutions de l'équation de Dwork*, 14 pp., www.unilim.fr/laco/seminaires/tan/exposes/rayonexpDwork.pdf, 2009.
- [9] B. DWORK : *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631-648.
- [10] B. DWORK : *On the zeta function of an hypersurface*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **12** (1962), 5-68.
- [11] M. HAZEWINKEL : *Witt vectors. Part I*, Handbook of Algebra, volume 6, section 4H, 319-472, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009.
- [12] K. IWASAWA : *Local class field theory*, Oxford University Press, New York, Clarendon Press, Oxford, 1986. viii+155 pp.
- [13] N. KOBLITZ : *p -adic Numbers, p -adic Analysis, and Zeta-Functions*. Graduate Texts in Mathematics **58**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. x+122 pp.
- [14] J LUBIN AND J TATE : *Formal complex multiplication in local fields*. Ann. of Math. (2), **81** (1965), 380-387.
- [15] A. PULITA: *Rank one solvable p -adic differential equations and finite abelian characters via Lubin-Tate groups*. Math. Ann. **337** (2007), no. 3, 489-555.
- [16] A. ROBERT: *A course in p -adic Analysis*. Graduate Texts in Mathematics **198**, Springer-Verlag, New York, 2000. xvi+437 pp.
- [17] J.P. SERRE: *Corps locaux*. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Nancago, VIII. Actualités Sci. Indust., No. 1296. Hermann, Paris, 1962.
- [18] J.P. SERRE: *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques*. Publ.Maths.I.H.E.S (1962), no.12, 69-85.